組合せ論

山本真基

２０２４年9月

「数え上げ」や「グラフ理論」などの組合せ論の初歩を学習する．組合せ論は，離散数学の一分野であり，アルゴリズム論，計算量理論，暗号理論，符号理論といったコンピュータサイエンスの様々な分野で応用されている．ここでは，以下の目次にあるよう，前半は数え上げに関する基礎事項，後半はグラフ理論の初歩を学習する．

以降で使われる表記

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ をそれぞれ，自然数，整数，有理数，実数の集合とする．($\mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ をそれぞれ，正の有理数，正の実数，の集合とする．) また，$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ とする．更に, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．
- 対数関数 log, ln について，底が 2 であるとき log，底が e であるとき ln，と表記する．(よって，任意の $x \in \mathbb{R}^+$ について $2^{\log x} = x$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.)
- $X \stackrel{\text{def}}{=} Y$ は，X の定義は Y であることを意味する．

目次

第 1 章　順列と組合せ 1

1.1 順列 1

1.2 組合せ 3

1.3 重複順列・重複組合せ 4

第 2 章　二項係数 9

2.1 二項定理 9

2.2 一般化二項定理 10

2.3 スターリングの公式 13

第 3 章　鳩ノ巣原理 15

3.1 鳩ノ巣原理 15

3.2 鳩ノ巣原理の拡張 17

第 4 章　包除原理 19

4.1 包除原理 19

4.2 包除原理の応用 21

第 5 章　母関数 * 25

5.1 母関数の性質 25

5.2 母関数を用いた数え上げ 27

第 6 章　グラフ 33

6.1 グラフとは 33

6.2 色々なグラフ 37

6.2.1 経路グラフ 38

6.2.2 閉路グラフ 38

6.2.3 完全グラフ 38

6.2.4 正則グラフ 40
6.2.5 二部グラフ 41
6.2.6 オイラーグラフ 43
6.2.7 ハミルトングラフ 45
6.2.8 木 46
6.2.9 根付き木 49
6.3 マッチング 52
6.4 グラフ彩色 54
6.4.1 グラフ頂点彩色 54
6.4.2 グラフ辺彩色 56

索引 72

付録 A 集合 77
A.1 集合とは 77
A.2 部分集合 79
A.3 補集合 80
A.4 和集合，積集合 81
A.5 ド・モルガンの法則 82
A.6 集合族 84
A.7 集合の分割 85

付録 B 論理 89
B.1 命題とは 89
B.2 命題論理 90
B.3 ド・モルガンの法則（命題論理） 91
B.4 論理関数 93
B.5 標準形論理式 94
B.6 含意，同値 95
B.7 述語論理 96
B.8 ド・モルガンの法則（述語論理） 98
B.9 論理と集合 99

第 1 章

順列と組合せ

1.1 順列

定義 1.1

A を集合とする．A のすべての要素を（一直線に）並べてできる列を A の**順列**という．

例 1.1. $A = \{1, 2, 3\}$ とする．A の順列は，

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

A の順列の個数は $3! = 6$ である．

定理 1.1. A を集合とする．$|A| = n$ のとき，A の順列の個数は $n!$ である．

証明. n についての数学的帰納法により示される． ■

注 1.1. $0! = 1$ と定義される．これは次のように解釈される．$A = \emptyset$ とする．（$|A| = 0.$）上の定理より，A の順列の個数は $0! = 1$ である．これは，A の順列は空列（何もない列）のみであることを意味する．

定義 1.2

A を集合とする．A の k（$0 \leq k \leq |A|$）個の要素を並べてできる列を A の **k-順列**という．

例 1.2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．A の 3-順列は,

$$\begin{array}{l}(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1),\\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (2,1,4),\ (2,4,1),\ (4,1,2),\ (4,2,1),\\ \quad\vdots\\ (3,4,5),\ (3,5,4),\ (4,3,5),\ (4,5,3),\ (5,3,4),\ (5,4,3).\end{array}$$

A の 3-順列の個数は $5!/(5-3)! = 60$ である．

定理 1.2. A を集合，k, n $(0 \leq k \leq n)$ を任意の整数とする．$|A| = n$ のとき，A の k-順列の個数は,

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

証明. k についての数学的帰納法により示される． ■

定義 1.3

A を集合とする．A のすべての要素を円形に並べてできる列を A の**円順列**という．

例 1.3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ とする．A の円順列は,

$$(1,2,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (1,4,3,2).$$

A の円順列の個数は $(4-1)! = 6$ である．

定理 1.3. A を集合とする．$|A| = n$ のとき，A の円順列の個数は $(n-1)!$ である．

証明. n についての数学的帰納法により示される． ■

定理 1.4. 第 1 種のものが n_1 個，第 2 種のものが n_2 個，$\ldots$，第 s 種のものが n_s 個あるとする．同種のものは同じものとみなした場合の $n_1 + \cdots + n_s$ 個のものの順列の個数は,

$$\frac{(n_1 + \cdots + n_s)!}{n_1! \cdots n_s!}.$$

証明. $n_1+\cdots+n_s$ 個のものの順列の個数は,（それら一つ一つが異なるものとみなした場合）$(n_1+\cdots+n_s)!$ である．そのうちのある順列 σ を考える．任意の $i\in[s]$ について，第 i 種のものは n_i 回，σ に出現する．それら n_i 個のものの順番を入れ替えたある順列を σ' とする．同種のものは同じものとみなした場合，$\sigma=\sigma'$ となる．第 i 種のものの順列の個数は $n_i!$ であることから，定理を満たす順列の個数は,

$$\frac{(n_1+\cdots+n_s)!}{n_1!\cdots n_s!}.$$

■

問 1.1. 白玉が 2 個，黒玉が 3 個ある．これら 5 個の玉の並べ方（白・黒の並ぶパターン）をすべてあげなさい．また，その並べ方の個数を求める式を示しなさい.

1.2　組合せ

定義 1.4

k,n（$0\le k\le n$）を任意の非負整数，A を n 個の要素の集合とする．A から k 個を選ぶ選び方の個数を $\binom{n}{k}$ と表す.

注 1.2. 高校数学では，$\binom{n}{k}$ を ${}_nC_k$ と表した.

例 1.4. $A=\{1,2,3\}$ とする．A から 2 個選ぶ組合せは,

$$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}.$$

よって，A から 2 個選ぶ組合せの個数は $\binom{3}{2}=3$ である.

定理 1.5. k,n（$0\le k\le n$）を任意の整数，A を n 個の要素の集合とする．このとき,

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

証明. k についての数学的帰納法により示される. ■

例 1.5. 先の例（$A=\{1,2,3\}$）の A から 2 個選ぶ組合せの個数 $\binom{3}{2}$ は,

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = 3$$

事実 1.1. 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ について，$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

問 1.2. 任意の非負整数 n, k（ただし，$k \leq n$）について，以下の事実を示しなさい.（二つ目と三つ目については $k \geq 1$．更に，三つ目については $k \leq n-1$.）

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

注 1.3. 上の問について，n 個から k 個を選ぶ選び方は，それぞれ以下のように解釈することができる.

1. n 個から k 個を除く.
2. まず，n 個から一つを選ぶ出す.（それが n 通りある.）その各々に対して，（一つ選び出したので）$n-1$ 個から $k-1$ 個を選び出す.（それが $\binom{n-1}{k-1}$ 通りある.）それぞれの選び方に重複が k 回ある.（例えば，選び方 $1, \ldots, k$ は，最初に選ぶ 1 により，2 により,...，k により，という k 回ある.）
3. n 個から k 個を選ぶ選び方は次のように分解できる．n 個目を選ぶ選び方と n 個目を選ばない選び方．前者は $\binom{n-1}{k-1}$ 通りあり（n 個目は選ばれているので，残りの $n-1$ 個から $k-1$ 個を選ぶ選び方)，後者は $\binom{n-1}{k}$ 通りある（n 個目は選ばれていないので，残りの $n-1$ 個から k 個を選ぶ選び方).

1.3　重複順列・重複組合せ

定理 1.6. n 種のものから重複を許して k 個のものを並べる**重複順列**の個数は,

$$n^k.$$

このとき,（不足することなく）各種 k 個以上あるものとする.

証明. ■

例 1.6. 3種類のものから重複を許して2個のものを並べる重複順列は，3種類のものを $\{a,b,c\}$ とすれば，

$$(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,c).$$

また，2種類のものから重複を許して3個のものを並べる重複順列は，2種類のものを $\{0,1\}$ とすれば，

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ \cdots,\ (1,1,1).$$

定理 1.7. n 種のものから重複を許して k 個のものを選ぶ**重複組合せ**の個数は，

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

このとき，（不足することなく）各種 k 個以上あるものとする．

証明. k 個の丸印，$n-1$ 個の棒印を考える．これら $(n-1)+k$ 個の丸と棒を一列に並べる並べ方の個数は，（同種のものは同じものであるので）定理 1.4 より，

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

よって，これらの並べ方と重複組合せの選び方との一対一対応を示せばよい．（つまり，並べ方の集合から選び方の集合への全単射を示す．）

丸と棒の任意の並べ方を σ とする．σ において，棒印を順に $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ として，a_1 以前にある丸印の個数を t_1，任意の $i:2\leq i\leq n-1$ について，a_{i-1} から a_i の間にある丸印の個数を t_i，更に，a_{n-1} 以降にある丸印の個数を t_n とする．このとき，任意の $i:1\leq i\leq n$ について，第 i 種のものを t_i 個選ぶことにする．（$\sum_{i:1\leq i\leq n} t_i = k$ より，この選び方は重複組合せのある一つを表している．）σ をこの選び方に対応させる写像を f とする．

問 1.3. f が全単射であることを示しなさい．

以上より，定理が示される．■

例 1.7. 3種類のものから重複を許して2個のものを選ぶ重複組合せは，3種類のものを $\{a,b,c\}$ とすれば，

$$(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,c).$$

また，2 種類のものから重複を許して 3 個のものを選ぶ重複組合せは，2 種類のものを $\{0,1\}$ とすれば，

$$(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1).$$

問 1.4. $A=\{1,2,3\}$ とする．このとき，A から重複を許して 3 個の数字を選ぶ重複組合せをすべて挙げなさい．また，その選び方の個数を求める式を求めなさい.

問 1.5. 上の定理で示された重複組合せは，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 上の以下の方程式を満たす非負整数の解の個数と同じである.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ = \ k.$$

その理由を説明しなさい.

章末問題

以下の問いに答えなさい．

1. k 種類のカードを n 人に配ることを考える．
   (a) カードが各種 n 枚以上あり，n 人それぞれに一枚のカードを配る場合，カードの配り方は何通りあるか？
   (b) カードは各種ちょうど一枚しかなく，これらすべてのカードを n 人に配る（複数枚配られる人や一枚も配られない人がいてもよい）場合，カードの配り方は何通りあるか？
2. k 枚の（区別のつかない）コインがある．これらすべてのコインを n 人に配ることを考える．
   (a) コインの配り方は何通りあるか？
   (b) n 人のそれぞれに少なくとも一枚のコインを配る場合（$k \geq n$），コインの配り方は何通りあるか？
3. $x_1, \ldots, x_n$ を変数として，$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$（$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$）を満たす整数解 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ を考える．
   (a) $\forall i \in [n][x_i \geq 0]$ を満たす整数解は何通りあるか？
   (b) $\forall i \in [n][x_i \geq 1]$ を満たす整数解は何通りあるか？（$k \geq n$ とする．）
4. n 個の座席が一列に並んでいる．（区別のつかない）k 人を互いに隣り合わないように着席させることを考える．（ただし，$n \geq 2k - 1$ とする．）このような配置は何通りあるか？
5. A を $|A| = n$ である集合とする．$\mathcal{S} \subseteq 2^A$ が以下を満たしているとき，$|\mathcal{S}| \leq 2^{n-1}$ であることを示しなさい．任意の $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ について $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.
6. A, B を，$|A| = n, |B| = k$ である集合とする．関数 $f : A \to B$ の個数を考える．以下の関数全体の個数を求めなさい．（全射の個数については，命題 4.5 を参照．）
   (a) A から B への関数すべて
   (b) A から B への全単射（$n = k$）
   (c) A から B への全射（$n \geq k$）
   (d) A から B への単射（$n \leq k$）

7. 以下の二つの等式を示しなさい[*1]．（一つ目については $k \geq 1$.）

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}.$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i-1}{k-i} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0}.$$

[*1] ともに，$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ を用いる．

第 2 章

二項係数

任意の自然数 n，任意の実数 $a_1, \ldots, a_n$ について，

$$\sum_{i\in[n]} a_i \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$
$$\prod_{i\in[n]} a_i \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

2.1 二項定理

事実 2.1. a, b を任意の実数とする．このとき，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

定理 2.1 (二項定理)**.** a, b を実数とする．この時，任意の整数 $n \geq 0$ について，

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

証明. n についての数学的帰納法より示す．$n = 0$ の時，$(a+b)^0 = 1$, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ より，定理の等式は成り立つ．ある非負整数 n に対して，定理の等式が成り立つとする．この時，

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&= (a+b) \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (\because \text{ 帰納仮定}) \\
&= a \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n-i+1} \\
&= \left(a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} \right) + \left(b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n-i+1} \right) \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n-i+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{i} b^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{i} b^{n+1-i} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) a^{i} b^{n+1-i} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^{i} b^{n+1-i} \quad (\because \text{ 問 1.2 の 3}) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{i} b^{n+1-i}.
\end{aligned}
$$

■

例 2.1 (二項定理)**.** $n = 5$ であれば,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \binom{5}{0} a^0 b^5 + \binom{5}{1} a^1 b^4 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \binom{5}{3} a^3 b^2 + \binom{5}{4} a^4 b^1 + \binom{5}{5} a^5 b^0 \\
&= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5.
\end{aligned}
$$

問 2.1. 以下の等式を証明しなさい.

1. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.
2. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (x+1)^n$.
3. $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$.

2.2　一般化二項定理

前章では, $\binom{n}{k}$ を, 非負整数 n, k ($0 \leq k \leq n$) に対して定義した. ここでは, これを任意の整数 n, 任意の非負整数 k へ拡張する[*1].

[*1] 更に, n は任意の実数へ (更に複素数へ) 拡張できる.

定義 2.1

任意の整数 n，任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ について，

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} & k \in \mathbb{N} \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

事実 2.2. $0 \leq n < k$ のとき，$\binom{n}{k} = 0$.

問 2.2. 上の事実が成り立つ理由を説明しなさい.

問 2.3. 以下の等式のうち，任意の整数 n，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つものを選びなさい.（前章の問 1.2 は $1 \leq k \leq n$ に対してであった.）また，それらについて等号が成立する理由を示しなさい.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

問 2.4. 以下の二つの等式が，任意の整数 n，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことを示しなさい.（前章の章末問題 7 は $1 \leq k \leq n$ に対してであった.）

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-i-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}.$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i-1}{k-i} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k-1}{0}.$$

事実 2.3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$.

問 2.5. 上の事実が成り立つ理由を説明しなさい.

定理 2.2 (一般化二項定理)**.** 任意の整数 n について,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

ただし, $|x| < 1$ とする.

証明. $f(x) = (1+x)^n$ のマクローリン展開（$a = 0$ におけるテイラー展開）より,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (\because \text{ 関数 } f(x) \text{ のマクローリン展開}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot 1^{n-k}}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.\end{aligned}$$

■

系 2.3. 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

ただし, $|x| < 1$ とする.

証明. 定理より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^n} &= (1+(-x))^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-x)^k. \quad (\because \text{ 事実 } 2.3) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.\end{aligned}$$

■

2.3　スターリングの公式

定理 2.4 (スターリングの公式)**.** 任意の自然数 n について,

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \;\le\; n! \;\le\; \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+1/n).$$

命題 2.5. 任意の非負整数 n, k（$k \le n$）について,

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \;\le\; \binom{n}{k} \;\le\; \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

証明. 一つ目の不等式は,

$$\binom{n}{k} \;=\; \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i} \;\ge\; \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n}{k} \;=\; \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

二つ目の不等式は,

$$\binom{n}{k} \;\le\; \frac{n^k}{k!} \;\le\; n^k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{e}{k}\right)^k \;\le\; \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

■

章末問題

以下の問いに答えなさい．

1. 以下の等式が成り立つことを示しなさい．

(a)
$$\begin{cases} \text{偶数ごとの和} \quad : \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} = 2^{n-1} \\ \text{奇数ごとの和} \quad : \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{n/2-1} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} n \text{ が偶数} \quad : \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 - \binom{n}{3}2^3 + \cdots + \binom{n}{n}2^n = 1 \\ n \text{ が奇数} \quad : \quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 - \binom{n}{3}2^3 + \cdots - \binom{n}{n}2^n = -1 \end{cases}$$

2. 以下の等式を組合せ的解釈を与えることにより示しなさい．

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

それにより，以下の等式を示しなさい．

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

3. 以下の等式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{n!} \cdot 2^n = \binom{2n}{n}$$

4. 以下の等式が成り立つことを示しなさい．

(a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i\binom{n}{i} = 0$

5. 以下の等式が成り立つことを示しなさい．

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$$

第 3 章

鳩ノ巣原理

3.1　鳩ノ巣原理

定理 3.1 (鳩ノ巣原理)**.** n 羽の鳩と $n-1$ 個の鳩ノ巣がある．どの鳩にもある一つの鳩ノ巣を割り当てることを考える．このとき，ある鳩ノ巣には 2 羽以上の鳩が割り当てられることになる．

証明. 背理法により示す．つまり，どの鳩の巣も高々 1 羽の鳩が割り当てられたとする．鳩の巣は $n-1$ 個であることから，鳩が高々 $n-1$ 羽であることになる．これは鳩が n 羽いることに反する． ■

問 3.1. ３６７人が集まれば，同じ誕生日の人が存在することを示しなさい．

問 3.2. 二人以上集まったとき，各々その中に少なくとも一人は知り合いがいる場合，知り合いの人数が等しい人のペアが存在することを示しなさい．

問 3.3. n を任意の自然数とする．$1, 2, \ldots, 2n$ からどの $n+1$ 個を選んでも，その中には，互いに素な二つの自然数（それらの最大公約数が 1）が存在することを示しなさい．

命題 3.2. a, b を互いに素な自然数とする．（つまり，a と b の最大公約数が 1 である．）このとき，以下を満たす二つの整数 $x, y \geq 0$ が存在する．

$$xa - yb = 1.$$

証明. 任意の $i : 1 \leq i \leq b$ について，$f_i = i \cdot a - 1$ とする．（$f_i \geq 0$.）更に，$f_i = q_i b + r_i$ とする．（$q_i \geq 0,\ 0 \leq r_i \leq b - 1$.）つまり，

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot a - 1 & = & q_1 b + r_1 \\ 2 \cdot a - 1 & = & q_2 b + r_2 \\ 3 \cdot a - 1 & = & q_3 b + r_3 \\ & \vdots & \\ b \cdot a - 1 & = & q_b b + r_b \end{array}$$

背理法により示す．$0 \notin \{r_1, \ldots, r_b\}$ とする．つまり，$\{r_1, \ldots, r_b\} \subseteq \{1, \ldots, b-1\}$ とする．$|\{1, \ldots, b-1\}| = b - 1$ であるので，鳩ノ巣原理より，ある $i, j \in [b]$（$i < j$）が存在して $r_i = r_j$．よって，

$$\begin{aligned} & (ja - 1) - (ia - 1) = (q_j b + r_j) - (q_i b + r_i) \\ \iff & (j - i)a = (q_j - q_i)b \end{aligned}$$

a, b が互いに素であることから，この等式より，$j - i$ は b で割り切れる必要がある．$0 < j - i < b$ よりこれは不可能である．よって，$0 \in \{r_1, \ldots, r_b\}$ である．つまり，ある $i \in [b]$ について $r_i = 0$．このことから，

$$i \cdot a - 1 \ = \ q_i b + r_i \iff i \cdot a - q_i b \ = \ 1$$

■

問 3.4. n を任意の自然数とする．以下が成り立つことを示しなさい．

$$\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}, \exists S \subseteq [n] \left[n \mid \sum_{i \in S} a_i \right].$$

つまり，任意の自然数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して，ある $S \subseteq [n]$ が存在して，$\sum_{i \in S} a_i$ が n で割り切れる．

3.2　鳩ノ巣原理の拡張

命題 3.3 (鳩ノ巣原理の拡張)**.** n 羽の鳩と m 個の鳩ノ巣がある．どの鳩にもある一つの鳩ノ巣を割り当てることを考える．このとき，$n \geq km$ であれば，ある鳩ノ巣には k 羽以上の鳩が割り当てられることになる．

証明. 背理法により示す．つまり，どの鳩ノ巣も高々 $k-1$ 羽の鳩が割り当てられたとする．このとき，鳩は高々 $(k-1)m$ 羽であることになる．これは鳩が km 羽以上いるという仮定に反する． ■

鳩ノ巣原理の拡張は，次のようにいいかえることができる．n/m は一つの巣に鳩が平均して何羽いるかを表している．つまり，その「平均」が（少なくとも）k であれば，k 羽以上いる巣が少なくとも一つあることを保証している．

問 3.5. あるクラスの平均点が７０点であった．そのクラスには，７０点以上をとった人が少なくとも一人いることを示しなさい．また，７０点以下をとった人が少なくとも一人いることを示しなさい．

問 3.6. あるクラスに n 人の生徒がいる．そのクラスには m 個の委員会があるとする．（n, m はともに偶数であるとする．）また，それぞれの委員会は少なくとも $n/2$ 人の生徒で構成されているものとする．（ある生徒が複数の委員会に所属することもある．）このとき，$m/2$ 以上の委員会に所属する生徒が少なくとも一人いることを示しなさい．

命題 3.4. $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1})$ を任意の異なる実数の列とする．このとき，$n+1$ 個の単調増加部分列か $n+1$ 個の単調減少部分列が存在する．

証明. $n+1$ 個の単調増加部分列が存在しないとする．（この仮定のもと，$n+1$ 個の単調減少部分列が存在することを示せばよい．）任意の $i \in [n^2+1]$ について，a の部分列 $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n^2+1}$ で，a_i を含む最長の単調増加部分列の長さを z_i とする．（仮定より，

$z_i \in [n]$.）ここで，

$$\begin{aligned} S_1 &= \{i \in [n^2+1] : z_i = 1\} \\ S_2 &= \{i \in [n^2+1] : z_i = 2\} \\ &\vdots \\ S_n &= \{i \in [n^2+1] : z_i = n\} \end{aligned}$$

このとき，拡張版鳩ノ巣原理より，ある $j \in [n]$ が存在して，$|S_j| \geq n+1$.

問 3.7. この事実が成り立つ理由を説明しなさい.

$S_j = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ とする.（$k \geq n+1$.）ただし，（一般性を失うことなく）$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ とする．このとき，

$$a_{i_1} \ > \ a_{i_2} \ > \ \cdots \ > \ a_{i_k}.$$

問 3.8. この事実が成り立つ理由を説明しなさい.

よって，$n+1$ 個の単調減少部分列（つまり，$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$）が存在する. ■

例 3.1. $n = 3$（$n^2+1 = 10$）のとき，

$$(a_1, \ldots, a_{10}) \ = \ (6, 4, 7, 5, 10, 3, 1, 9, 2, 8),$$

とする．このとき，長さ $4 = 3+1 = n+1$ の単調減少部分列 $(a_3, a_4, a_6, a_9) = (7, 5, 3, 2)$ が存在する．一方，$(6, 7, 10)$, $(6, 7, 9)$, $(4, 5, 9)$ など，単調増加部分列の最長の長さは 3 である.

第 4 章

包除原理

4.1　包除原理

命題 4.1. A, B を有限集合とする．このとき，

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

証明. ベン図を用いて示す. ■

問 4.1. この命題を証明しなさい.

命題 4.2. A, B, C を有限集合とする．このとき，

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

証明. ベン図を用いて示す. ■

問 4.2. この命題を証明しなさい.

以上を一般化すると以下のようになる.

定理 4.3 (包除原理)**.** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ を有限集合とする．このとき,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \;=\; \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_i\le n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}|\,.$$

証明. 定理の等式の右辺を次のように考えることにより証明する[*1]．右辺の値は，それぞれの $a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ が（プラス・マイナスの符号も考慮して）$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}$ により何回数え上げられたか，その回数の合計を示している．一方，左辺は，任意の a についてちょうど一回である．（つまり，任意の a について，右辺において a がちょうど一回，数え上げられていることを示す.）

$a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ を任意にとる．一般性を失うことなく，a は $A_1, A_2, \ldots, A_t$ に属して，$A_{t+1}, A_{t+2}, \ldots, A_n$ には属さないとする．つまり，$a \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t$ かつ，任意の $i : t+1 \le i \le n$ について，$a \notin A_i$ とする．定理の等式の右辺において，任意の $i \in [n]$，任意の $\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq [n]$ について，

$$\begin{array}{lll} \{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq [t] & \text{のとき} & a \in A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i} \\ \{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \not\subseteq [t] & \text{のとき} & a \notin A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i} \end{array}$$

問 4.3. 上の事実を証明しなさい.

よって，等式の右辺において，a が（プラス・マイナスの符号を考慮して）$A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}$ により数え上げられた回数 S は,

$$S \;=\; (-1)^{1-1}\binom{t}{1} + (-1)^{2-1}\binom{t}{2} + \cdots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t}$$

問 4.4. 上の等式を証明しなさい.

よって,

$$\begin{aligned} S &= (-1)\sum_{i=1}^{t}\binom{t}{i}(-1)^i \\ &= 1 + (-1)\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}(-1)^i \end{aligned}$$

[*1] n についての数学的帰納法により証明することもできる.

$$
\begin{aligned}
&= 1 + (-1)(1 + (-1))^t \quad (\because\ \text{二項定理}) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

つまり，a が（$\pm$ の符号を考慮して）数え上げられた回数はちょうど 1 である．（これは左辺の場合と同じである．）以上のことが任意の $a \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ について成り立つので，定理の等式は成り立つ． ■

例 4.1. $n = 5$ の場合，

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \cdots \cup A_5| = {} & |A_1| + \ \cdots\ + |A_5| \\
& -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ \cdots\ - |A_4 \cap A_5| \\
& +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ \cdots\ + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\
& -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \ \cdots\ - |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\
& +|A_1 \cap \cdots \cap A_5|
\end{aligned}
$$

問 4.5. $n = 5$ の包除原理において，正の項と負の項はそれぞれいくつ出現するか．

4.2　包除原理の応用

定義 4.1

次のような関数 ϕ を**オイラー関数**という．任意の自然数 n について，n と互いに素な（n との最大公約数が 1）n 以下の自然数の個数を $\phi(n)$ と表記する．

例 4.2.

$$
\begin{array}{lcll}
\phi(6) & = & 2 & \because\ 1, 5 \\
\phi(7) & = & 6 & \because\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
\phi(10) & = & 4 & \because\ 1, 3, 7, 9
\end{array}
$$

事実 4.1. n が素数なら $\phi(n) = n - 1$．

定理 4.4 (オイラー積の公式)**.** 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ を n の素因数分解とする．このとき，

$$
\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).
$$

証明. 包除原理を次のように用いる．任意の $i : 1 \leq i \leq k$ について，素数 p_i の倍数で n 以下の自然数の集合を A_i とする．このとき，$|A_i| = n/p_i$ となる．一般的に，任意の $1 \leq j_1 < \cdots < j_i \leq k$ について，

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}| \;=\; \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_i}}.$$

問 4.6. 上の等式を証明しなさい．

よって，包除原理より，

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq k} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots A_{j_i}| \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq k} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_i}} \\
&= n \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq k} \frac{1}{p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_i}} \right) \\
&= n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \right)
\end{aligned}$$

問 4.7. 上の最後の等式変形において，$k = 3$ である場合どうなるか確かめなさい．

以上より，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \;=\; n - n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

よって，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \;=\; n.$$

一方，$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + \phi(n) = n$ が成り立つ．

問 4.8. この事実を証明しなさい．

これら二つの等式より定理が示される． ■

例 4.3. $n = 60$ の場合，$k = 3$ で，$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ $e_1 = 2, e_2 = 1, e_3 = 1$ となる．つまり，$n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$．このとき，

$$\phi(60) \;=\; 60 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \;=\; 16.$$

問 4.9. $n = 60$ の場合，60 と互いに素な 60 以下の自然数を求めなさい．また，これらのうち素数でないものは何か.

命題 4.5 (全射の個数)**.** A, B を，$|A| = n, |B| = k$（$n \geq k$）である集合とする．関数 $f : A \to B$ のうち全射である関数の個数は,

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \;=\; \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

証明. 関数 $f : A \to B$ の全体を U とする．($|U| = k^n$.) $B = \{y_1, \ldots, y_k\}$ とする．任意の $i \in [k]$ について，E_i を y_i が $f : A \to B$ の像でない関数の集合とする．つまり,

$$E_i \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \{f \in U : y_i \notin f(A)\}.$$

このとき，全射である関数の集合は $U \setminus \bigcup_{i \in [k]} E_i$ となる．よって，全射である関数の個数は,

$$\left| U \setminus \bigcup_{i \in [k]} E_i \right| \;=\; |U| - \left| \bigcup_{i \in [k]} E_i \right| \;=\; k^n - \left| \bigcup_{i \in [k]} E_i \right|.$$

包除原理より,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in [k]} E_i \right| &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq k} |E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \cdots \cap E_{j_i}| \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n. \end{aligned}$$

よって，全射である関数の個数は,

$$|U| - \left| \setminus \bigcup_{i \in [k]} E_i \right| = k^n - \left| \bigcup_{i \in [k]} E_i \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n \\
&= k^n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i} \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n \\
&= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} \cdot \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n.
\end{aligned}
$$

■

問 4.10. 以下の等式が成り立つことを示しなさい.

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

系 4.6 (分割の個数)**.** k, n を $k \le n$ である自然数とする.（区別のつく）n 個のものを k 個に分割する（分割されたそれぞれの部分は少なくとも一つの要素を含む）仕方の個数は,

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

第 5 章

母関数 *

5.1 母関数の性質

定義 5.1

実数列 $(a_0, a_1, a_2 \ldots,)$ の**母関数** $a(x)$ は,

$$a(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

実数列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots,)$ の**指数母関数** $a(x)$ は,

$$a(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \frac{x^i}{i!}.$$

ただし，$x \in \mathbb{R}$ がとる値（関数 a の定義域）は，$a(x)$ が収束する範囲である.

例 5.1. 数列 $(1, 1, 1, \ldots)$ の母関数 $a(x)$ は,

$$a(x) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot x^i \ = \ 1 + x + x^2 + \ldots \ = \ \frac{1}{1-x}.$$

ただし，a の定義域を $(-1, 1)$ とする.

問 5.1. $|x| < 1$ であるなら，$1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$ であることを示しなさい.

例 5.2. 数列 $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ の母関数 $a(x)$ は,

$$a(x) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \cdot x^i \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i \ = \ \frac{1}{1-2x}.$$

ただし，a の定義域を $(-1/2, 1/2)$ とする．

例 5.3. $\ln(1+x)$ のテイラー展開を用いると，$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ となる．これより，数列 $(0, 1, 1/2, 1/3, \dots)$ の母関数 $a(x)$ は，

$$a(x) \;=\; 0 \cdot x^0 + \frac{1}{1} \cdot x^1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \dots \;=\; 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \;=\; -\ln(1-x).$$

ただし，a の定義域を $(-1, 1)$ とする．

問 5.2. $|x| < 1$ であるなら，$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ であることを示しなさい．

命題 5.1. 数列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ と数列 $(b_0, b_1, b_2, \dots)$ の母関数を，それぞれ $a(x)$, $b(x)$ とする．このとき，

1. （和）$(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ の母関数は $a(x) + b(x)$.
2. （定数倍）(ca_0, ca_1, ca_2) の母関数は $ca(x)$.
3. （右移動）$(\underbrace{0, \dots, 0}_{t}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ の母関数は $x^t a(x)$.
4. （左移動）$(a_t, a_{t+1}, a_{t+2}, \dots)$ の母関数は $(a(x) - \sum_{i=0}^{t} a_i x^i)/x^t$.
5. （代入：$cx \to x$）$(a_0, ca_1, c^2 a_2, \dots)$ の母関数は $a(cx)$.
6. （代入：$x^t \to x$）$(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{t}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{t}, a_2, \dots)$ の母関数は $a(x^t)$.
7. （微分）$(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$ の母関数は $a'(x)$.
8. （積分）$(0, a_0, a_1/2, a_2/3, \dots)$ の母関数は $\int a(x)dx$（積分定数は０）.
9. （積）$(c_0, c_1, c_2, \dots)$（ただし，$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$）の母関数は $c(x) = a(x)b(x)$.

例 5.4. 数列 $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ の母関数は，$1/(1-x^2)$.（$(1, 1, 1, \dots)$ の母関数が $1/(1-x)$ であることと，上の命題の性質 6 より.）

例 5.5. 数列 $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ の母関数は, $1/(1-x)^2$.（$(1, 1, 1, \dots)$ の母関数が $1/(1-x)$ であることと，上の命題の性質 7 より.）

例 5.6. 数列 $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \dots)$ の母関数は,

$$a(x) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^2 x^i \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} i(i+1)x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i.$$

ここで,

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i = \sum_{i=1}^{\infty} ix^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty}(x^i)' = \sum_{i=0}^{\infty}(x^i)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

また,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} i(i+1)x^i = \sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)x^i &= x\sum_{i=1}^{\infty} i(i+1)x^{i-1} \\ &= x\sum_{i=1}^{\infty}(x^{i+1})'' = x\sum_{i=0}^{\infty}(x^i)'' = x\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)'' \\ &= x\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2x}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

以上より,

$$a(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

命題 5.2. 二項係数 $(\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2}, \ldots, \binom{m}{n}, \ldots)$ の母関数は $(1+x)^m$ である.

証明. 一般化二項定理より明らか. ■

5.2　母関数を用いた数え上げ

命題 5.3 (重複組合せ：問 1.5 参照)**.** 以下の等式を満たす非負整数 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ の解の個数は $\binom{n+k-1}{k}$.

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k.$$

証明. 以下の母関数を考える.（$|x| < 1$）

$$a(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}.$$

この母関数の n 個の積,

$$a(x)^n = \underbrace{(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)\cdots\cdots(1+x+x^2+\ldots)}_{n\text{ 個}}$$

の右辺を展開したときの x^k の係数を考える．

問 5.3. x^k の係数は，等式 $r_1 + \cdots + r_n = k$ を満たす非負整数 $r_1, \ldots, r_n$ の解の個数に等しいことを示しなさい．

一方，系 2.3 より，

$$a(x)^n \;=\; \frac{1}{(1-x)^n} \;=\; \sum_{k=0} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

この等式より，x^k の係数は $\binom{n+k-1}{k}$ であり，上の問より，これが命題を満たす解の個数になる． ■

命題 5.4. 積が 2 項演算であることから，$n+1$ 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ の積

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_{n+1}$$

の演算回数は n である．このとき，積の計算順序は $\binom{2n}{n}/(n+1)$ 通りある．

注 5.1. n 回の積の計算順序は, n 組のかっこ記号の入れ方に対応する．例えば, $n+1=4$ のとき，つまり，４つの変数の積に対する３つ組のかっこ記号の入れ方には，以下の５通りがある．

$$(a(b(cd))),\ (a((bc)d)),\ ((ab)(cd)),\ ((a(bc))d),\ (((ab)c)d).$$

証明. $n+1$ 個の数に対する（n 回の積の）計算順序の個数を b_n と表す．（$b_0 = 1$ とする．）b_n を $b_1, \ldots, b_{n-1}$ を用いて表すことを考える．このとき，

$$\begin{array}{l} a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot \ \cdots \ \cdot a_{n+1}) \\ (a_1 \cdot a_2) \cdot (a_3 \cdot \ \cdots \ \cdot a_{n+1}) \\ (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot (a_4 \ \cdots \ \cdot a_{n+1}) \\ \qquad\quad \vdots \\ (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ \cdots \ a_n) \cdot a_{n+1} \end{array}$$

よって，

$$b_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}.$$

よって，b_i の母関数 $B(x)$ は[*1]，

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \\
&= b_0 x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i-1} b_j b_{i-1-j} \right) x^i \\
&= 1 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+1} \right)
\end{aligned}
$$

問 5.4. 上の最後の等式変形を証明しなさい．

これより，

$$
\begin{aligned}
B(x) &= 1 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+1} \right) \\
&= 1 + x \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) \\
&= 1 + x \cdot (B(x))^2
\end{aligned}
$$

つまり，

$$x \cdot (B(x))^2 - B(x) + 1 \ = \ 0.$$

$B(x)$ についての二次方程式（x は定数とみなす）を解くと，

$$B(x) \ = \ \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

$\lim_{x \to 0} B(x) = b_0 = 1$ より，

$$B(x) \ = \ \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} \ &= \ (1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k \quad (\because \ \text{一般化二項定理}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/2)(-1/2)\ldots(1/2-k+1)}{k!} (-1)^k 4^k x^k
\end{aligned}
$$

[*1] $B(x)$ が（ある範囲で）定義できるために，厳密には，$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{1/n}$ の存在性と有界性を示す必要がある．

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{(k-3/2)(k-5/2)\dots(1/2)(-1/2)}{k!} 2^k x^k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)(2k-5)\dots 1(-1)}{k!} 2^k x^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)(2k-5)\dots 1}{k!} 2^k x^k \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \frac{(2k-3)(2k-5)\dots 1}{(k-1)!} 2^{k-1} x^k \\
&= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2(k-1)}{k-1} x^k \quad (\because \text{ 章末問題の問 3})
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1 - \left(1 - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\binom{2(i-1)}{i-1} x^i\right)}{2x} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\binom{2(i-1)}{i-1} x^i}{x} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\binom{2(i-1)}{i-1} x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1}\binom{2i}{i} x^{i}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.
$$

■

この定理が示す組合せの数は**カタラン数**と呼ばれる．他にも，二分木の個数，凸多角形の三角形分割の個数，格子グラフの対角線以上の最短経路の個数，などが，カタラン数となる．

命題 5.5. $[n]$ 上の置換 $\pi : [n] \to [n]$ のうち，不動点をもたない（$\forall i \in [n][\pi(i) \neq i]$）ものを完全置換という．完全置換の個数は，

$$
n! \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.
$$

証明. $[n]$ 上の完全置換の個数を d_n とする．（$d_0 = 0$, $d_1 = 0$ とする．）$[n+1]$ 上の完全置換 π を考える．（d_{n+1} を d_n, d_{n-1} で表す．）$i \in [n]$ を任意に固定する．$\pi(n+1) = i$ としたとき，$[n+1]$ 上の完全置換 π を以下のように大別する．

$$\begin{array}{ll} (1) & \pi(i) = n+1 \\ (2) & \pi(i) \neq n+1 \end{array}$$

(1) の場合，そのような完全置換は d_{n-1} 個ある．(2) の場合，そのような完全置換は d_n 個ある．

問 5.5. これらの事実を示しなさい．

このことから，$i \in [n]$ として n 通りあるので，

$$d_{n+1} \;=\; n(d_n + d_{n-1}).$$

ここで，d_i の指数母関数を $D(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (x^i/i!)$ とすると[*2]，

$$D'(x) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} d_i \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

これより，

$$D'(x) \;=\; x \cdot D'(x) + x \cdot D(x),$$

問 5.6. この等式の導出を示しなさい．

よって，

$$(1-x)D'(x) \;=\; x \cdot D(x).$$

この微分方程式を解くと，

$$D(x) \;=\; \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

問 5.7. この等式の導出を示しなさい．

よって，

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots$$

[*2] $D(x)$ が（ある範囲で）定義できることを示す必要がある．

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

より，

$$\begin{aligned} D(x) &= \left(1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots\right)(1 + x + x^2 + \dots) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{1!}\right)x^1 + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\right)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(i! \cdot \sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\right)\frac{x^i}{i!} \end{aligned}$$

以上より，

$$d_n = n! \cdot \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

■

第 6 章

グラフ

6.1 グラフとは

定義 6.1

V を**頂点**の集合としたとき，頂点対の集合 $E \subseteq V \times V$ を**辺**の集合という．このとき，$G = (V, E)$ を V 上の**有向グラフ**という．辺の集合 E において，(u, v) と (v, u) を同じ辺とみなすとき，$G = (V, E)$ を**無向グラフ**という．有向グラフの辺を**有向辺**，無向グラフの辺を**無向辺**という．

G をグラフとする．$V(G)$ で G の頂点の集合を，$E(G)$ で G の辺の集合を表す．

以降では，特に断らない限り，グラフといった場合，無向グラフを指すものとする．

例 6.1 (グラフ)**.** 以下は，$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の無向グラフ $G = (V, E)$ である．

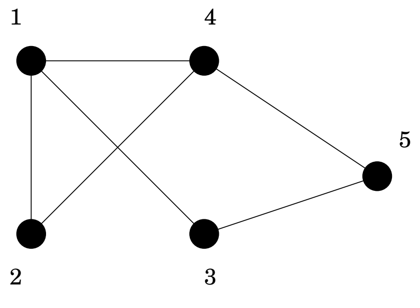


図 6.1: 無向グラフ

このグラフ G の頂点集合 $V(G)$，辺集合 $E(G)$ は，

$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
E(G) &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}
\end{aligned}
$$

問 6.1. 任意のグラフ $G=(V,E)$ について，$|E| \le |V|(|V|-1)/2$ である．この事実を示しなさい．

定義 6.2

$G=(V,E)$ をグラフとする．頂点 $u,v \in V$ について $(u,v) \in E$ であるとき，u と v は**隣接する**という．頂点 u に隣接する頂点の集合を $N(u)$ と表記する．つまり，$N(u)=\{v \in V : (u,v) \in E\}$．$u$ の**次数**とは，u の隣接頂点の個数であり，$d_G(u)$（または，単に $d(u)$）と表記する．（つまり，$d_G(u)=|N(u)|$.）

例 6.2 (隣接頂点，次数)**.** 図 6.1 のグラフ $G=(V,E)$ では，

$$\begin{array}{rcl} N(1) & = & \{2,3,4\} \\ N(2) & = & \{1,4\} \\ N(3) & = & \{1,5\} \\ N(4) & = & \{1,2,5\} \\ N(5) & = & \{3,4\} \end{array}$$

よって，頂点 1,4 の次数は 3，頂点 2, 3, 5 の次数は 2 である．

定理 6.1. 任意のグラフにおいて，頂点の次数の総和は，辺の個数の 2 倍に等しい．つまり，

$$\sum_{u \in V} |N(u)| \;=\; 2|E|.$$

証明. ■

系 6.2. 任意のグラフにおいて，次数が奇数の頂点は偶数個存在する．

証明. ■

問 6.2. この定理と系を証明しなさい．

定義 6.3

$G=(V,E)$ をグラフとする．任意の $s,t \in V$ について，s から t への G 上の

経路（パス）とは，以下を満たす頂点の列 $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ である．

1. $v_0 = s$
2. $v_k = t$
3. $\forall i \in [k][(v_{i-1}, v_i) \in E]$

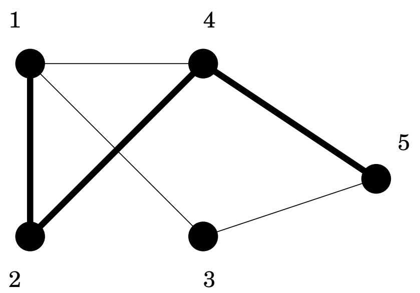
このとき，**経路の長さ**を k とする．特に，任意の $i, j \in [k] \cup \{0\}$（$i \neq j$）について $v_i \neq v_j$ であるとき，P を**単純経路**という．

定義 6.4

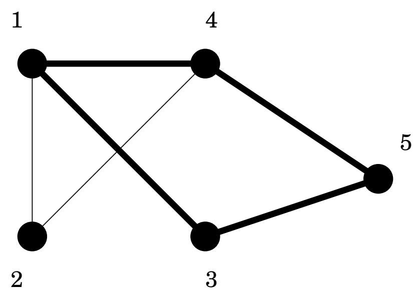
$G = (V, E)$ をグラフとする．任意の $k \geq 3$ に対して，$P = (v_1, \ldots, v_k)$ を v_1 から v_k への経路とする．$(v_1, v_k) \in E$ であるとき，$P' = (v_1, \ldots, v_k, v_1)$ を**閉路**という．このとき，**閉路の長さ**を k とする．特に，任意の $i, j \in [k]$（$i \neq j$）について $v_i \neq v_j$ であるとき，P' を**単純閉路**という．

以降では，特に断らない限り，経路（閉路）といった場合，単純経路（単純閉路）を指すものとする．

例 6.3 (経路・閉路)**.** 例 6.1 の $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上のグラフ $G = (V, E)$ において，以下が経路 $P = (1, 2, 4, 5)$ と閉路 $C = (1, 3, 5, 4, 1)$ の例である．



(a) 経路 P



(b) 閉路 C

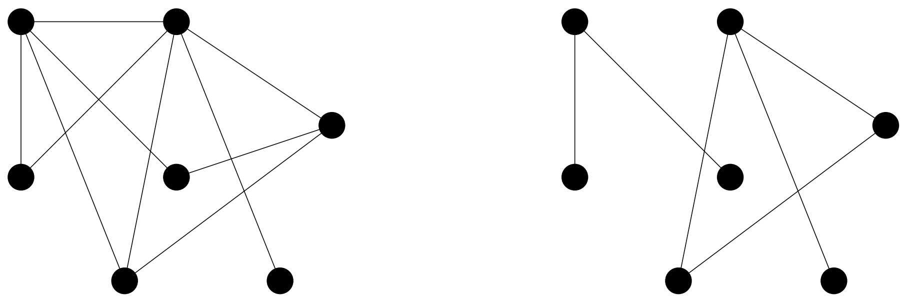
問 6.3. 例 6.1 の $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上のグラフ $G = (V, E)$ グラフにおいて，最長の経路及び最長の閉路を示しなさい．

定義 6.5

$G = (V, E)$ をグラフとする．頂点 u から頂点 v への経路が存在するとき，u, v は**連結している**という．任意の頂点 $u, v \in V$ について u, v が連結しているとき，G

を**連結グラフ**という．

例 6.4 (連結グラフ)**.** 以下が連結グラフと非連結グラフの例である．



(a) 連結グラフ　　(b) 非連結グラフ

定義 6.6

$G = (V, E)$ を連結グラフとする．任意の $u, v \in V$ について，u から v への経路の長さの最小を u から v への**距離**といい，$d(u, v)$ と表す．

距離を考える場合，（特に断りがない限り）グラフは連結であるとする[*1]．

例 6.5 (距離)**.** 以下のグラフ $G = (V, E)$（$V = \{1, 2, \ldots, 7\}$）において，$d(1, 1) = 0$, $d(2, 7) = 2$, $d(3, 7) = 3$ である．

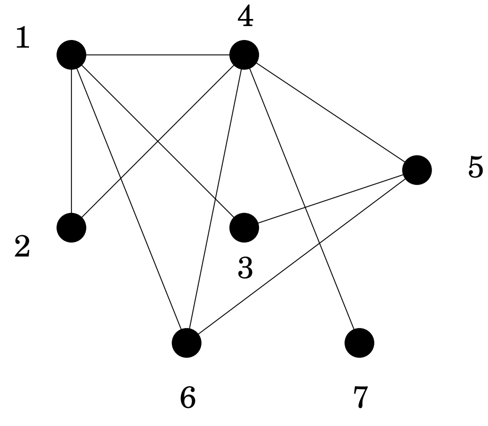


図 6.2: 距離

[*1] グラフ $G = (V, E)$ が非連結のとき，$u, v \in V$ 間の経路が存在しなければ，$d(u, v) = \infty$ とみなす．

事実 6.1. $G=(V,E)$ をグラフとする．距離 $d:V\times V\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ は以下を満たす．このとき，

1. 任意の $u,v\in V$ について，$d(u,v)\geq 0$.（非負性）
2. 任意の $u,v\in V$ について，$u=v$ なら $d(u,v)=0$.
3. 任意の $u,v\in V$ について，$d(u,v)=d(v,u)$.（対称性）
4. 任意の $u,v,w\in V$ について，$d(u,v)\leq d(u,w)+d(w,v)$.（三角不等式）

問 6.4. 上の事実のうち，事実 3, 4 を証明しなさい．

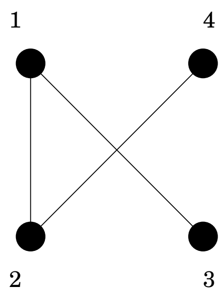
6.2　色々なグラフ

定義 6.7

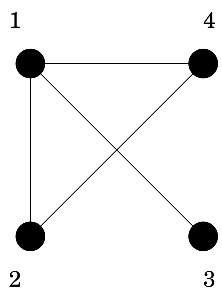
$G=(V,E)$ をグラフとする．任意の $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ について，グラフ $G'=(V',E')$ を G の**部分グラフ**という．また，任意の $V'\subseteq V$ について，次のように定義される部分グラフ $G'=(V',E')$ を，V' に誘導される G の**誘導部分グラフ**といい，$G[V']$ と表す．

$$(u,v)\in E' \iff u\in V' \text{ かつ } v\in V'$$

例 6.6 (部分グラフ，誘導部分グラフ)**.** $G=(V,E)$ を例 6.1 のグラフとする．$V'=\{1,2,3,4\}$, $E'=\{(1,2),(1,3),(2,4)\}$ とする．このとき，部分グラフ $G'=(V',E')$，誘導部分グラフ $G[V']$ はそれぞれ図 6.3 となる．



(a) $G'=(V',E')$



(b) $G[V']$

図 6.3: 部分グラフ，誘導部分グラフ

$G'' = G[V']$ としたとき，頂点 4 の次数は，それぞれ，$d_{G'}(4) = 1$, $d_{G''}(4) = 2$, $d_G(4) = 3$ となる．

6.2.1　経路グラフ

定義 6.8

$G = (V, E)$ を連結グラフとする．G が経路であるとき，つまり，ある二つの頂点 $a, b \in V$ について $d(a) = d(b) = 1$，任意の頂点 $v \in V \setminus \{a, b\}$ について $d(v) = 2$ であるとき，G を**経路グラフ**という．$|V| = n$ のとき，V 上の経路グラフを P_n と表す．

例 6.7 (経路グラフ)**.** 以下の図は経路グラフ P_5 である．

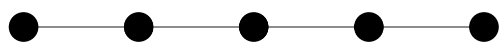


図 6.4: 経路グラフ

6.2.2　閉路グラフ

定義 6.9

$G = (V, E)$ を連結グラフとする．G が閉路であるとき，つまり，任意の頂点 $v \in V$ について $d(v) = 2$ であるとき，G を**閉路グラフ**という．$|V| = n$ のとき，V 上の閉路グラフを C_n と表す．

例 6.8 (閉路グラフ)**.** 以下の図は閉路グラフ C_5 である．

6.2.3　完全グラフ

定義 6.10

$G = (V, E)$ をグラフとする．任意の頂点 $u, v \in V$ について $(u, v) \in E$ であるとき，G を**完全グラフ**という．$|V| = n$ のとき，V 上の完全グラフを K_n と表す．

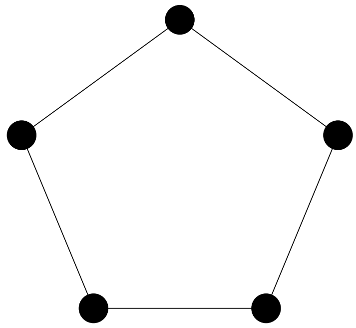
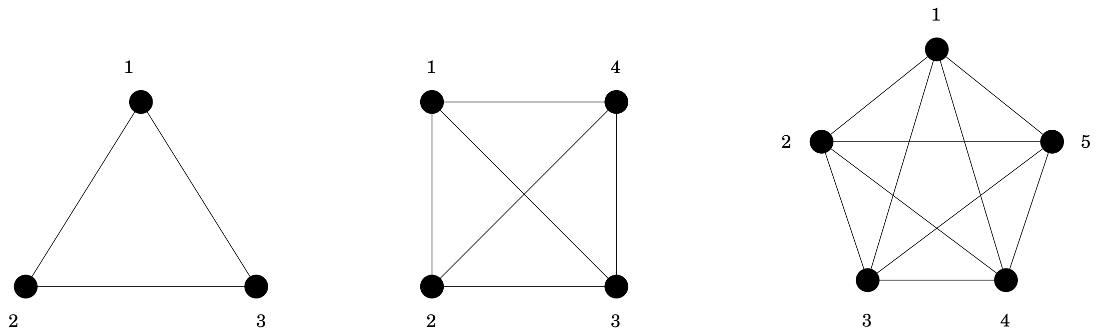


図 6.5: 閉路グラフ

例 6.9 (完全グラフ)**.** 以下の図は，3, ,4, 5 頂点上の完全グラフである．



(a) K_3　(b) K_4　(c) K_5

図 6.6: 完全グラフ

命題 6.3. K_n の辺の個数は $\binom{n}{2}$ である．

証明. ■

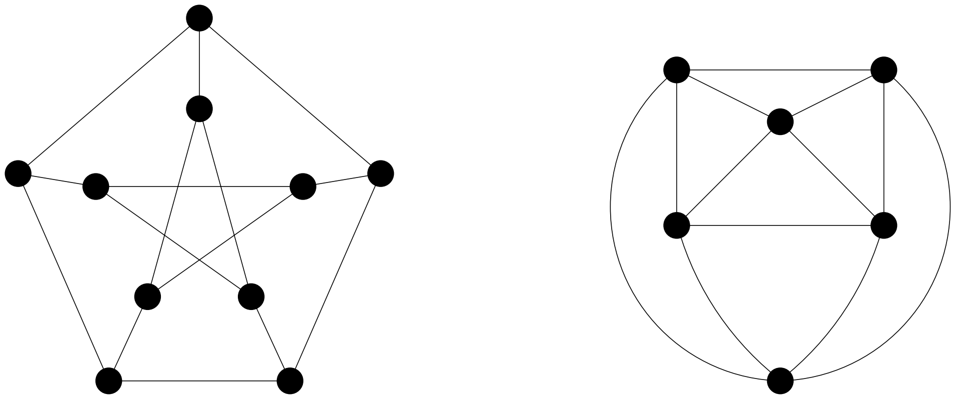
問 6.5. 上の命題を証明しなさい．

6.2.4　正則グラフ

定義 6.11

$G = (V, E)$ をグラフとする．任意の頂点 $v \in V$ について $d(v) = k$ であるとき，G を k-**正則グラフ**という．

例 6.10 (正則グラフ)**.** 以下の図は，それぞれ 3-正則グラフ・4-正則グラフの例である．



(a) ペテルセングラフ　　(b) 正八面体グラフ

図 6.7: 正則グラフ

事実 6.2. K_n は $(n-1)$-正則グラフである．

命題 6.4. n 頂点上の k-正則グラフの辺の個数は $kn/2$ である．

証明. ■

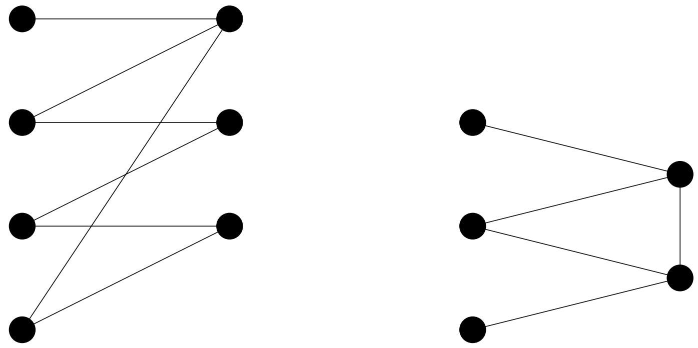
問 6.6. 上の命題を証明しなさい．

6.2.5　二部グラフ

定義 6.12

$G=(V,E)$ をグラフとする．このとき，ある V の二分割 $[X,Y]$（$X\cap Y=\emptyset$, $X\cup Y=V$）が存在して, $G[X]$ 及び $G[Y]$ に辺がないならば, つまり, $G[X]=(X,\emptyset)$, $G[Y]=(Y,\emptyset)$ ならば，G を**二部グラフ**といい，$G=(X,Y,E)$ と表す.

例 6.11 (二部グラフ)**.** 以下の図は，二部グラフとそうでないグラフの例である.



(a) 二部グラフ　(b) 二部グラフでない

図 6.8: 二部グラフ

定理 6.5. $G=(V,E)$ をグラフとする．G が二部グラフであるための必要十分条件は, G に長さが奇数の閉路が存在しないことである.

証明. ($\Rightarrow$) G を二部グラフ $G=(X,Y,E)$ とする．$C=(v_1,v_2,\ldots,v_k,v_1)$ を G 上の任意の閉路とする．（閉路がない場合は明らか．）一般性を失うことなく $v_1\in X$ とする．このとき，G は二部グラフであることから（$G[X]$, $G[Y]$ に辺がないので），$v_1,v_3,\ldots,v_{k-1}\in X$, $v_2,v_4,\ldots,v_k\in Y$ となる．よって，k は偶数となり，C の長さは偶数となる.

($\Leftarrow$) $G=(V,E)$ に長さが奇数の閉路が存在しないとする．以下, V の二分割を求める．一般性を失うことなく，G は連結であるとする．（そうでなければ，連結した部分グラフごとに V の二分割を求めればよい．）$u\in V$ を任意の頂点とする．このとき，$X,Y\subseteq V$

を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
X &\overset{\mathrm{def}}{=} \{v \in V : d(u,v) \equiv_2 0\}, \\
Y &\overset{\mathrm{def}}{=} \{v \in V : d(u,v) \equiv_2 1\}.
\end{aligned}
$$

以下，$[X, Y]$ が V の分割であり，$G[X], G[Y]$ に辺がないことを示す．G が連結であることから，$X \cup Y = V$，また，X, Y の定義より，$X \cap Y = \emptyset$ である．よって，$[X, Y]$ は V の分割である．

問 6.7. $X \cup Y = V$ かつ $X \cap Y = \emptyset$ であることを証明しなさい．

次に，$G[X]$ に辺がないことを背理法により示す．（$G[Y]$ についても同様.）ある頂点 $v_1, v_2 \in X$ について $(v_1, v_2) \in E$ とする．u から v_1, v_2 への最短経路をそれぞれ P_1, P_2 とする．（X の定義より，$|E(P_1)| \equiv_2 0, |E(P_2)| \equiv_2 0$ である.）このとき，$P_1, (v_1, v_2), P_2$ と辿る経路（P_2 については逆から）は[*2]，長さが奇数の閉路となり仮定に矛盾する．よって，任意の頂点 $v_1, v_2 \in X$ について $(v_1, v_2) \notin E$ である．これより，$G[X]$ に辺がないことがいえる．

問 6.8. 上の証明にならって，$G[Y]$ に辺がないことを証明しなさい．

■

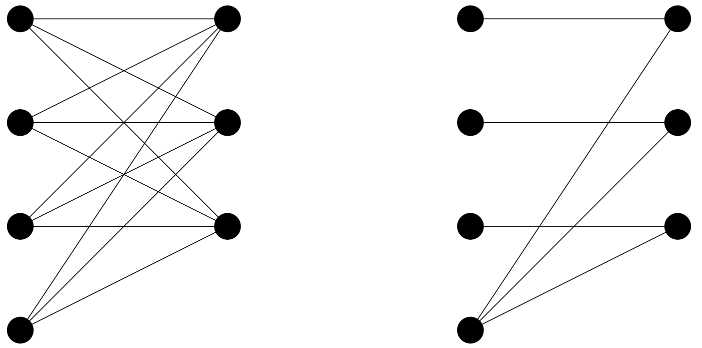
定義 6.13

$G = (X, Y, E)$ を二部グラフとする．$E = X \times Y$ であるとき，G を**完全二部グラフ**いう．

例 6.12 (完全二部グラフ)**.** 以下の図は，完全二部グラフとそうでないグラフの例である．

問 6.9. $G = (X, Y, E)$ を完全二部グラフとする．$|E|$ を $|X|, |Y|$ で示しなさい．

[*2] より詳細には，P_1 と P_2 が頂点を共有する場合も考慮する必要がある．



(a) 完全二部グラフ　(b) 完全二部グラフでない

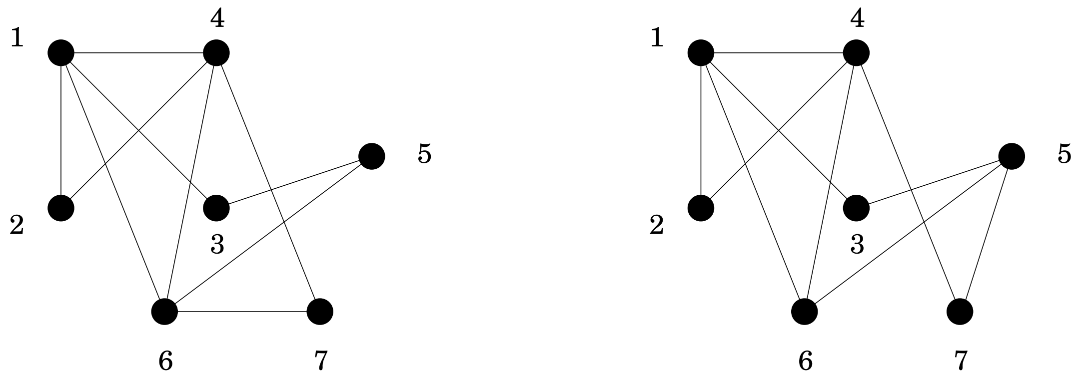
図 6.9: 完全二部グラフ

6.2.6　オイラーグラフ

定義 6.14

$G=(V,E)$ を連結グラフとする．G のすべての辺を一回だけ辿る経路（閉路）を**オイラー経路（オイラー閉路）**という．（経路（閉路）は単純でなくてもよい．）オイラー閉路をもつグラフを**オイラーグラフ**という．

例 6.13 (オイラーグラフ)**.** 以下の図は，オイラーグラフとそうでないグラフの例である．オイラーグラフのオイラー閉路は，$1,2,4,6,7,4,1,6,5,3,1$ である．（他にも，$1,6,5,3,1,2,4,6,7,4,1$ などがある．）



(a) オイラーグラフ　(b) オイラーグラフでない

図 6.10: オイラーグラフ

定理 6.6. $G = (V, E)$ を連結グラフとする．G がオイラーグラフであるための必要十分条件は，G の任意の頂点の次数が偶数であることである．

証明. ($\Rightarrow$) G がオイラーグラフであるとする．$C = (a_0, a_1, \ldots, a_\ell)$（$a_i \in V$, $a_0 = a_\ell$, $\ell = |E|$）をオイラー閉路とする．以下，任意の $v \in V$ について v の次数を求める．v が C 中に k 回出現したとする．このとき，C がオイラー閉路である（G の辺が C にちょうど 1 回だけ出現する）ことから，v には $2k$ 個の辺が接続していることになる．よって，v の次数は偶数である．

($\Leftarrow$) G の任意の頂点の次数が偶数であるとする．以下，オイラー閉路が構築できることを示す．まず，G の閉路 C（単純でなくてもよい）を任意に選ぶ．（例えば，C として，ただ一つの頂点からなるものでもよい．）

主張 6.1. $E \setminus E(C) \neq \emptyset$ であるとき，$u \in V(C)$ または $v \in V(C)$ であるような辺 $(u, v) \in E \setminus E(C)$ が存在する．

問 6.10. この主張を証明しなさい．

上の主張を満たす辺 $e = (u, v) \in E \setminus E(C)$ を任意に選ぶ．（$E \setminus E(C) = \emptyset$ なら C がオイラー閉路となる．）一般性を失うことなく $u \in V(C)$ とする．

主張 6.2. 辺 e を含み，C の辺を含まない閉路（単純でなくてもよい）が存在する．

証明. u を端点とした（辺 e を含み C の辺を含まない）任意の経路（単純でなくてもよい）を $P = (u, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ とする．（$a_1 = v$.）任意の $i \in [k]$ について $a_i \neq u$ とする．（もしそうであれば，$a_i = u$ までの経路を考えればよい．）ここで，G の部分グラフ $G' = (V, E \setminus (E(C) \cup E(P)))$ を考える．仮定より，G の任意の頂点の次数は偶数であることから，u, a_k の「G' における」次数は奇数である，つまり，$d_{G'}(u) \equiv_2 1$ かつ $d_{G'}(a_k) \equiv_2 1$.（それ以外の頂点の次数は偶数である．）特に，$d_{G'}(a_k) \geq 1$. よって，ある $a_{k+1} \in V$ が存在して $(a_k, a_{k+1}) \in E(G')$. $P = (u, v, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ として，以上のことを，P の端点が u となるまで繰り返せば，主張が示される． ■

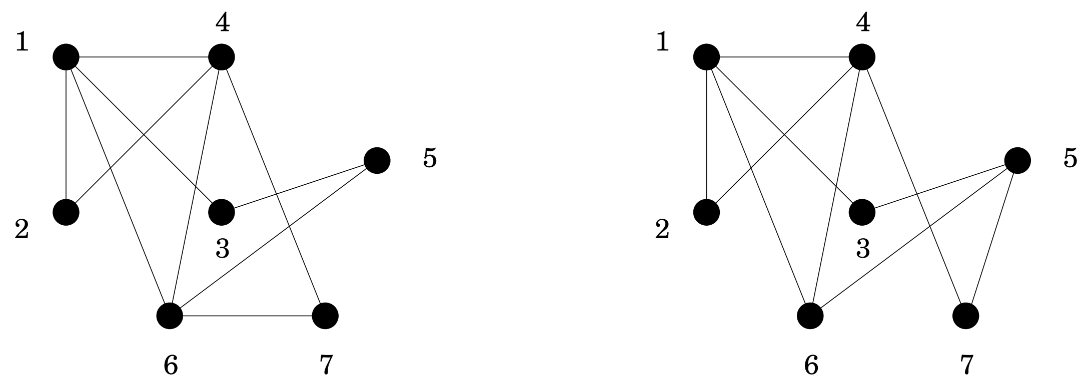
これら二つの主張より，辺 $e = (u, v)$ を含む（C とは辺を共有しない）閉路 C' が存在する．このことから，C より（真に）大きな閉路，$u \to C \to C' \to u$，が存在する．以上のことを，$E(C) = E$ となるまで繰り返せば，C はオイラー閉路となる． ■

6.2.7　ハミルトングラフ

定義 6.15

$G=(V,E)$ を連結グラフとする．G のすべての頂点を一回だけ辿る経路（閉路）を**ハミルトン経路（ハミルトン閉路）**という．ハミルトン閉路をもつグラフを**ハミルトングラフ**という．

例 6.14 (ハミルトングラフ)**.** 以下の図は，ハミルトングラフとそうでないグラフの例である．ハミルトングラフのハミルトン閉路は，$1,2,4,7,6,5,3,1$ である．



(a) ハミルトングラフ　(b) ハミルトングラフでない

図 6.11: ハミルトングラフ

問 6.11. （連結）2-正則グラフ（つまり，一つの閉路から成る連結グラフ）はハミルトングラフか.

問 6.12. 任意の（連結）3-正則グラフはハミルトングラフか.（そうでなければ反例をあげなさい.）

定理 6.7 (Ore の定理)**.** $G=(V,E)$ を連結グラフとする．（$|V|=n\geq 3.$）次の条件が成り立つならば，G はハミルトングラフである．隣接していない任意の頂点対 $u,v\in V$

について，

$$d(u)+d(v)\geq n.$$

証明. 対偶を示す．つまり，G がハミルトングラフでないとする．（このとき，隣接していないある頂点対 $u, v\in V$ について，$d(u)+d(v)<n$ であることを示す．）$G=(V,E)$ を含み，ハミルトングラフでない極大のグラフを $G'=(V,E')$ とする．（つまり，$E\subseteq E'$ かつ，任意の $e\in E'$ について $G''=(V,E'\cup\{e\})$ がハミルトングラフになる．）以下，隣接していないある頂点対 $u,v\in V$ について（つまり，$(u,v)\notin E'$），$d_{G'}(u)+d_{G'}(v)<n$ であることを示す．（$E\subseteq E'$ より，$(u,v)\notin E'$ は $(u,v)\notin E$ を意味して，$d(u)+d(v)\leq d_{G'}(u)+d_{G'}(v)<n$ となる．）$e=(u,v)\notin E'$ を任意に選ぶ．$G''=(V,E'\cup\{e\})$ のハミルトン閉路を $C=(u,v_1,v_2,\ldots,v_{n-2},v,u)$ とする．

主張 6.3. 任意の $i:2\leq i\leq n-2$ について，$(u,v_i)\in E'$ ならば $(v,v_{i-1})\notin E'$.

証明. 背理法により示す．つまり，$(u,v_i)\in E'$ かつ $(v,v_{i-1})\in E'$ であるとする．このとき，

$$u\to v_i\to v_{i+1}\to\cdots\to v_{n-2}\to v\to v_{i-1}\to v_{i-2}\to\cdots\to v_1\to u$$

はハミルトン閉路になる．これは，G' がハミルトングラフでないことに矛盾する． ■

$d_{G'}(u)=d$ とする．この主張より，$d_{G'}(v)\leq(n-3)-(d-1)+1=n-d-1$. よって，

$$d_{G'}(u)+d_{G'}(v)\leq d+n-d-1=n-1.$$

この不等式より，$d_{G'}(u)+d_{G'}(v)<n$ が示される． ■

問 6.13. 上の定理は，ハミルトングラフであるための十分条件が示されている．この条件は，ハミルトングラフであるための必要条件にもなっているか．（そうでなければ反例をあげなさい。）

6.2.8　木

定義 6.16

$G=(V,E)$ を連結グラフとする．G に閉路が存在しないとき，G を**木**という．

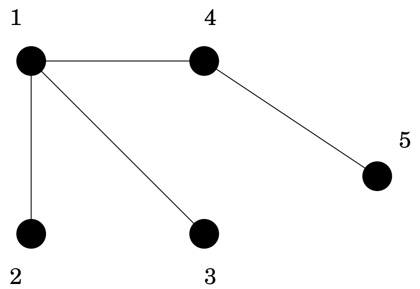


図 6.12: 無向グラフ

例 6.15 (木)**.** 以下は，$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の木 $G = (V, E)$ である．

定理 6.8. $G = (V, E)$ を木とする．このとき，

- 任意の頂点 u, v について，u から v への経路は一意である．
- どの辺 $(u, v) \in E$ を除去しても連結でなくなる．
- どの辺 $(u, v) \in (V \times V) \setminus E$ を追加しても唯一の閉路ができる．

証明. ■

問 6.14. 上の定理を証明しなさい．

定理 6.9. $G = (V, E)$ を連結グラフとする．（$|V| \geq 1$.）G が木であるための必要十分条件は，$|E| = |V| - 1$ である．

証明. ($\Rightarrow$)　G の頂点 V の個数についての帰納法により示す．$|V| = 1$ のときは明らか．$|V| \leq n$ のとき，任意のグラフ $G = (V, E)$ について，G が木であれば $|E| = |V| - 1$ であるとする．$|V| = n + 1$ のときを考える．$G = (V, E)$ が木であるとする．$e \in E$ を任意とする．上の定理より，$G' = (V, E \setminus \{e\})$ は非連結になる．G' の二つの連結グラフを T_1, T_2 とする．このとき，T_1, T_2 はともに木である．

問 6.15. その理由を説明しなさい．

よって，帰納仮定より，$|E(T_i)| = |V(T_i)| - 1$（$i = 1, 2$）となる．これより，

$$\begin{aligned}|E| &= |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 \\ &= (V(T_1) - 1) + (V(T_2) - 1) + 1 \\ &= n. \quad (\because\ V(T_1) + V(T_2) = n + 1)\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) 対偶を示す．つまり，$G = (V, E)$ が木でないとして，$|E| \neq |V| - 1$ であることを示す．G が木でないことから，G に閉路 C が存在する．閉路 C の任意の辺を $e_1 \in E$ とする．このとき，$G_1 = (V, E \setminus \{e_1\})$ は連結グラフである．

問 6.16. その理由を説明しなさい．

同様の操作を，G_i に閉路が存在する限り続ける．その結果，$G_k = (V, E \setminus \{e_1, \ldots, e_k\})$ に閉路が存在しないとする．つまり，G_k は木である．前半で示したように，$|E(G_k)| = |V| - 1$ が満たされる．よって，$|E| > |E(G_k)| = |V| - 1$ より $|E| \neq |V| - 1$. ■

系 6.10. $G = (V, E)$ を木とする．（$|V| \geq 2$ とする．）このとき，次数が 1 である頂点は 2 個以上存在する．

証明. ■

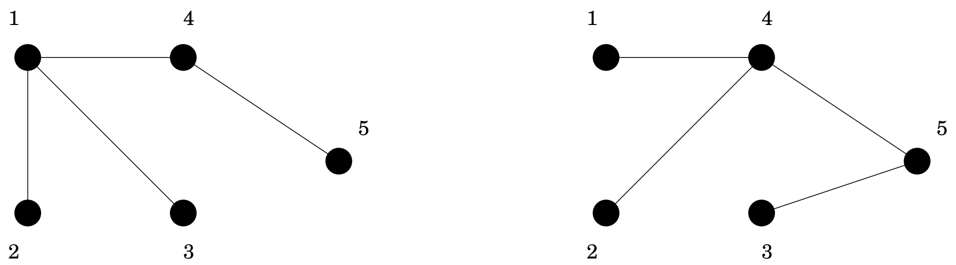
問 6.17. 上の系を証明しなさい．

定義 6.17

$G = (V, E)$ をグラフとする．$G' = (V, E')$ を G の部分グラフとする．（$E' \subseteq E$.）G' が木であるとき，G' を G の**全域木**という．

例 6.16 (全域木)**.** 以下の図は，図 6.1 で示されたグラフの全域木の例である．

定理 6.11 (ケーリーの全域木公式)**.** 完全グラフ K_n には n^{n-2} 通りの全域木が存在する．



(a) 全域木その 1　　(b) 全域木その 2

図 6.13: 図 6.1 のグラフの全域木

6.2.9　根付き木

命題 6.12. $G = (V, E)$ を木，$r \in V$ を任意の頂点とする．このとき，任意の $(u, v) \in E$ について，$|d(r, u) - d(r, v)| = 1$

証明. ■

定義 6.18

$T = (V, E)$ を木, $r \in V$ を T の任意の頂点とする．T の任意の無向辺 $(u, v) \in E$ について，$d(r, u) < d(r, v)$ となるように有向辺 (u, v) を考えた場合（上の命題よりそのような向きは一意である)，「有向木」と頂点 r の対 (T, r) を r を**根**とした**根付き木**という．

T の任意の有向辺 (u, v) について，u を v の**親**，v を u の**子**という．子をもたない頂点を T の**葉**という．r から葉までの距離の最大を T の**深さ**という．

T の任意の有向経路 $v_1, \ldots, v_k$ について，v_1 を v_k の**先祖**，v_k を v_1 の**子孫**という．

例 6.17 (根付き木)**.** 以下の図は，頂点 r を根とした根付き木である．(各有向辺は下向きであり矢印は省略されている．)

命題 6.13. $(T = (V, E), r)$ を根付き木とする．任意の頂点 u, v について，w が u, v の先祖であるならば，w の任意の先祖は u, v の先祖である．

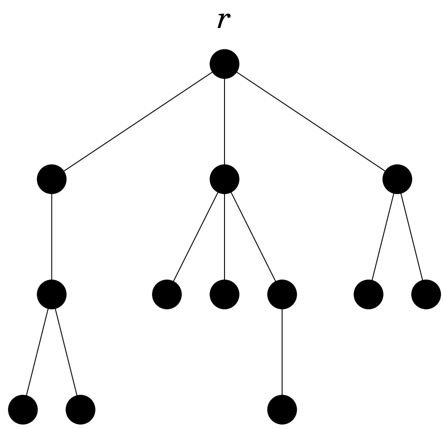


図 6.14: 根付き木

証明. ■

問 6.18. 上の命題を示しなさい.

定義 6.19

$(T = (V, E), r)$ を根付き木とする．任意の頂点 $v \in V$ について，$(u, v) \in E$ となる頂点 u の個数を v の**入次数**，$(v, w) \in E$ となる頂点 w の個数を v の**出次数**という．

事実 6.3. 入次数は親の個数に，出次数は子の個数に一致する．

命題 6.14. 根の入次数は 0，それ以外の任意の頂点の入次数は 1 である．また，葉の出次数は 0 である．

証明. ■

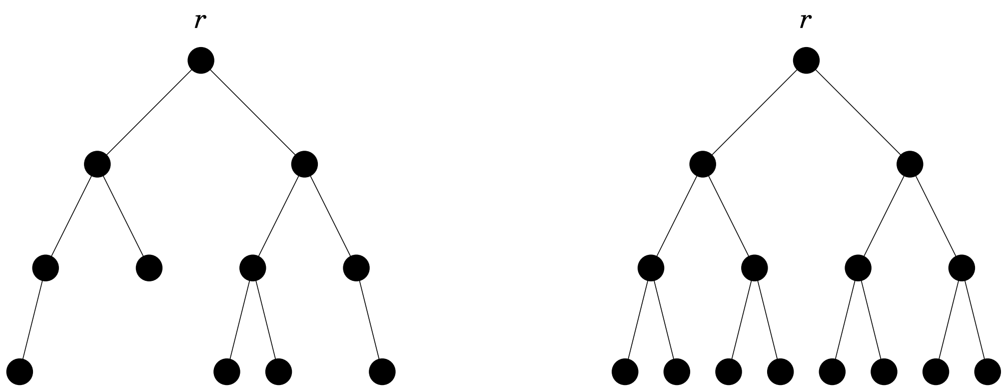
問 6.19. 上の命題を示しなさい.

定義 6.20

$(T = (V, E), r)$ を根付き木とする．葉以外の任意の頂点の出次数が「高々」2 であるとき，T を**二分木**という．更に，葉以外の任意の頂点の出次数が「ちょうど」2

であり，任意の葉 u について $d(r,u)$ が一定であるとき，二分木 T を**完全二分木**という．

例 6.18 (二分木)**.** 以下の図 6.15 が r を根とした二分木と完全二分木である．



(a) 二分木 (b) 完全二分木

図 6.15: 二分木と完全二分木

事実 6.4. $(T=(V,E),r)$ を完全二分木とする．任意の $d \in \mathbb{N}$ について，$|\{v \in V : d(r,v)=d\}| = 2^d$.

問 6.20. $(T=(V,E),r)$ を完全二分木とする．任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して，$A, B \subseteq V$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : d(r,v) < d\} \\ B &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : d(r,v) = d\} \end{aligned}$$

このとき，$|B|$ を $|A|$ を用いて表しなさい．

命題 6.15. $(T=(V,E),r)$ を完全二分木とする．$|V|=n$ のとき，T の深さは $\log(n+1)-1$ である．

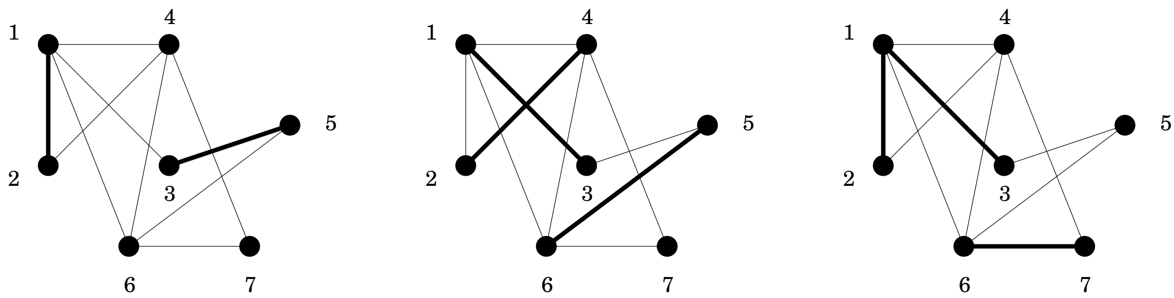
問 6.21. 上の命題を示しなさい．

6.3　マッチング

定義 6.21

$G = (V, E)$ をグラフとする．$M \subseteq E$ が**マッチング**であるとは，任意の $e, e' \in M$ について，e と e' の端点が同じでないことである．また，$M \subseteq E$ が**完全マッチング**であるとは，M がマッチングであり，任意の頂点 $v \in V$ があるマッチング辺 $e \in M$ の端点の一つであることである．

例 6.19 (マッチング)**.** 以下の図は，マッチングとそうでないものの例である．



(a) マッチング　(b) マッチング　(c) マッチングでない

図 6.16: マッチング

事実 6.5. グラフ $G = (V, E)$ に完全マッチングが存在する必要条件は，$|V|$ が偶数であることである．

定理 6.16 (ホールの定理)**.** $G = (X, Y, E)$ を $|X| = |Y|$ である二部グラフとする．G に完全マッチングが存在するための必要十分条件は，以下の条件を満たすことである．

$$\forall U \subseteq X [|U| \leq |N(U)|].$$

ただし，

$$N(U) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{u \in U} N_u.$$

証明. ($\Rightarrow$) G に完全マッチング $M \subseteq E$ が存在するとする．$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とする．一般性を失うことなく，$M = \{(x_i, y_i) \in E : i \in [n]\}$ とする．

$U \subseteq X$ を任意にとる．このとき，ある $S \subseteq [n]$ に対して，$U = \{x_i : i \in S\}$ である．M の定義より，

$$\{y_i : i \in S\} \subseteq N(U).$$

よって，

$$|U| \;=\; |S| \;=\; |\{y_i : i \in S\}| \;\leq\; |N(U)|.$$

($\Leftarrow$) $|X| = |Y| = n$ についての帰納法により示す．$n = 1$ のときは明らか．任意の $n \leq k$ について，以下が満たされているとする[*3]．

> $|X| = |Y| = n$ である任意の二部グラフ $G = (X, Y, E)$ について，$\forall U \subseteq X[|U| \leq |N(U)|]$ を満たすなら，G に完全マッチングが存在する．

$n = k + 1$ とする．$|X| = |Y| = n$ である任意の二部グラフ $G = (X, Y, E)$ を考える．$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ とする．G が $\forall U \subseteq X[|U| \leq |N(U)|]$ を満たすとする．以下の二つの場合を考える[*4]．

1. $\forall U \subsetneq X[|U| < |N(U)|]$.
2. $\exists U \subsetneq X[|U| = |N(U)|]$.

問 6.22. $U = X$ の場合を排除する（つまり，$U \neq X$ とする）理由を説明しなさい．

条件 1 が満たされる場合を考える．一般性を失うことなく，$(x_n, y_n) \in E$ であるとする．$X' = X \setminus \{x_n\}$, $Y' = Y \setminus \{y_n\}$ として，G の部分グラフ $G' = G[X' \cup Y']$ を考える．条件 1 が満たされることから，

$$\forall U \subseteq X'[|U| \leq |N_{G'}(U)|].$$

ただし，$N_{G'}(U) = N(U) \cap Y'$.

問 6.23. この条件が満たされる理由を説明しなさい．

よって，帰納仮定より，G' に完全マッチング M' が存在する．このとき，$M' \cup \{(x_n, y_n)\}$ は G の完全マッチングである．

条件 2 が満たされる場合を考える．条件 2 を満たす集合を $S \subsetneq X$ とする．（つまり，$|S| = |N(S)|$.）$T = N(S)$ とする．このとき，$|S| = |T|$ である．以下の G の部分グラフ G_1, G_2 を考える．

[*3] これが帰納仮定である．

[*4] 一方が他方の否定になっている．

- $G_1 = G[S \cup T]$.
- $G_2 = G[S' \cup T']$，ただし，$S' = X \setminus S, T' = Y \setminus T$.

このとき，$E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$．帰納仮定より，$G_1$ に完全マッチングが存在する．

問 6.24. この事実が成り立つ理由を説明しなさい．

$G_2 = G[S' \cup T']$ について，

$$\forall U \subseteq S'[|U| \leq |N_{G_2}(U)|]$$

ただし，$N_{G_2}(U) = N(U) \cap T'$.

問 6.25. この事実が成り立つ理由を説明しなさい．

帰納仮定より，G_2 に完全マッチングが存在する．よって，（辺を共有しない）G_1, G_2 双方に完全マッチングが存在することになる．このことは，G に完全マッチングが存在することを意味する． ■

6.4　グラフ彩色

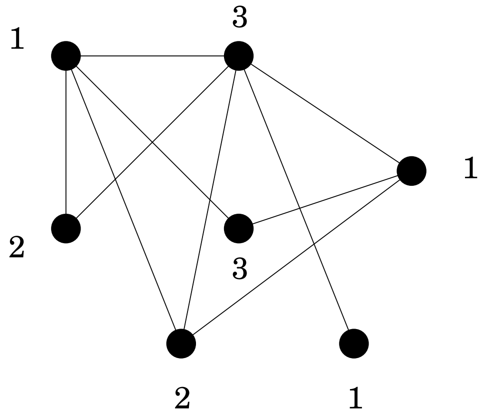
6.4.1　グラフ頂点彩色

定義 6.22

$G = (V, E)$ をグラフとする．任意の自然数 k について，$f : V \to \{1, \ldots, k\}$ を関数とする．f が次の条件を満たすとき，f を G の k-**頂点彩色**という．任意の辺 $(u, v) \in E$ について，$f(u) \neq f(v)$．そのような彩色 f が存在するとき，G を k-**頂点彩色可能**であるという．G が k-彩色可能であるような最小の自然数 k を，G の**頂点彩色数**といい，$\chi(G)$ と表す．

例 6.20 (グラフ頂点彩色)**.** 以下の図は，3-頂点彩色可能なグラフの例である．（2-頂点彩色不可能.）彩色は番号で表されている．

事実 6.6. $G = (V, E)$ をグラフとする．$\chi(G) = 1$ であるなら，$E = \emptyset$ である．



問 6.26. 以下のグラフの頂点彩色数を求めなさい．

1. K_n
2. 完全二部グラフ
3. 奇数長閉路
4. 木
5. ペテルセングラフ（図 6.7）

命題 6.17. $G = (V, E)$ をグラフとする．$\chi(G) = k$ であるとき，V の分割 $V_1, \ldots, V_k$ が存在して，

$$\forall i : 1 \leq i \leq k, \forall u, v \in V_i \ [(u, v) \notin E].$$

証明. G は k-彩色可能であるので，任意の $i : 1 \leq i \leq k$ について，$V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$ とする．このとき，$V_1, \ldots, V_k$ は V の分割であり，かつ，命題の条件を満たす． ■

命題 6.18. $G = (V, E)$ をグラフとする．G の最大次数が Δ であるならば，G は $(\Delta + 1)$-彩色可能である．

証明. $|V|$ に関する帰納法により示す．$|V| = 1$ のときは明らかに成り立つ．$|V| = n - 1$ のときに定理が成り立つとして，$|V| = n$ のときに定理が成り立つことを示す．$G = (V, E)$ を，最大次数が Δ である任意のグラフとする．$v \in V$ を任意とする．帰納仮定より，$G[V \setminus \{v\}]$ は $(\Delta + 1)$-彩色可能である．その彩色を $c : V \setminus \{v\} \to [\Delta + 1]$ とする．

v の隣接頂点を $v_1, \ldots, v_\Delta$ とする．このとき，ある $i \in [\Delta+1]$ が存在して，

$$i \notin \{c(v_j) : 1 \leq j \leq \Delta\}.$$

よって，$c(v) = i$ とすれば c は G の $(\Delta+1)$-頂点彩色となり，G は $(\Delta+1)$-彩色可能となる． ■

定理 6.19 (Brooks の定理)**.** $G = (V, E)$ をグラフとする．G の最大次数が Δ であるとする．G が完全グラフでも奇数長の閉路でもないならば，G は Δ-彩色可能である．

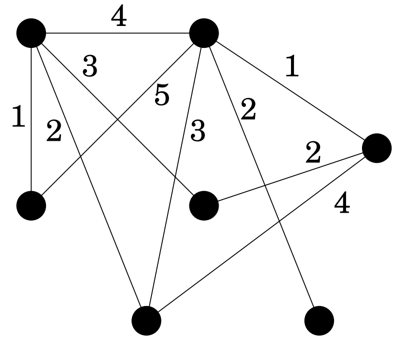
問 6.27. 最大次数が Δ で，$(\Delta-1)$-頂点彩色不可能であるグラフの例をあげなさい．ただし，完全グラフと奇数長の閉路を除く．

6.4.2　グラフ辺彩色

定義 6.23

$G = (V, E)$ をグラフとする．任意の自然数 k について，$f : E \to \{1, \ldots, k\}$ を関数とする．f が次の条件を満たすとき，f を G の k-**辺彩色**という．隣接する任意の辺対 $e, e' \in E$ について，$f(e) \neq f(e')$．そのような彩色 f が存在するとき，G を k-**辺彩色可能**であるという．G が k-辺彩色可能であるような最小の自然数 k を，G の**辺彩色数**といい，$\chi'(G)$ と表す．

例 6.21 (グラフ辺彩色)**.** 以下の図は，5-辺彩色可能なグラフの例である．（4-辺彩色不可能．）彩色は番号で表されている．



定理 6.20 (Vizing の定理)**.** $G = (V, E)$ をグラフとする．G の最大次数が Δ であるならば，$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$ である．

問 6.28. 上の定理のうち，$\Delta \leq \chi'(G)$ を示しなさい．

命題 6.21. n が奇数なら $\chi'(K_n) = n$，n が偶数なら $\chi'(K_n) = n - 1$.

証明. $n \geq 3$ とする．（$n \leq 2$ は明らか．）n が奇数のとき，K_n を正 n 角形とその対角線とみなす．（正 n 角形の頂点が K_n の頂点である．）以下，辺彩色 $c : E(K_n) \to [n]$ を示す．（つまり，$\chi'(K_n) \leq n$.）正 n 角形の辺は順に $1, 2, \ldots, n$ と彩色する．対角線は，それと平行な正 n 角形の辺と同じ色で彩色する．このとき，この彩色が n-辺彩色であることは明らかである．次に，$(n-1)$-辺彩色が存在しないことを示す．（つまり，$\chi'(K_n) \geq n$ を示す.）n が奇数のとき，一つの色で彩色できる K_n の辺は高々 $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ である．

問 6.29. この事実を示しなさい．

よって，K_n の辺の個数 $|E(K_n)|$ は高々 $((n-1)/2)\chi'(K_n)$ となる．$|E(K_n)| = n(n-1)/2$ より $\chi'(K_n) \geq n$.

n が偶数のとき，$V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ として，$\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ を頂点とした正 $(n-1)$ 角形とその対角線，それに，正 $(n-1)$ 角形の各頂点と v_n を結ぶ辺を考える．（これが K_n である.）以下，辺彩色 $c : E(K_n) \to [n]$ を示す．n が奇数のときの議論より，正 $(n-1)$ 角形とその対角線は $(n-1)$-辺彩色可能である．次に，残りの辺の彩色を示す．正 $(n-1)$ 角形の任意の頂点 $v \in \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ について，それに接続する辺のいずれにも彩色されていない色 $f(v) \in [n-1]$ が存在する．その色は，v の対角に位置する辺が彩色されている色である．このことから，$v \neq v'$ ならば $f(v) \neq f(v')$ が成り立つ．（つまり，それらは別々の色である.）よって，(v, v_n) を $f(v)$ で彩色することができ，K_n が $(n-1)$-辺彩色可能であることが示される．（K_n の最大次数が $n-1$ であることから，$\chi'(K_n) \geq n-1$ が示される.） ■

問 6.30. 上の定理の証明をもとに，K_5, K_6 の辺彩色を示しなさい．

定理 6.22. $G = (V, E)$ をグラフとする．G の最大次数が Δ であるとする．G が二部グラフであるならば，$\chi'(G) = \Delta$ である．

証明. $\chi'(G) \geq \Delta$ は明らか．以下，$\chi'(G) \leq \Delta$ を示す．これを，$|E|$ に関する帰納法により示す．$|E| = 1$ のときは明らか．$|E| = m - 1$ のときに定理が成り立つとして，$|E| = m$ のときに定理が成り立つことを示す．$G = (X, Y, E)$ を任意の二部グラフとする．$e_0 = (u_0, v_0) \in E$ を任意とする．このとき，$G' = (X, Y, E \setminus \{e_0\})$ は，$|E \setminus \{e_0\}| = m - 1$ より，$\chi'(G') \leq \Delta$ である．（G' の最大次数が高々 Δ であるので.）その辺彩色を $c' : E \setminus \{e_0\} \to [\Delta]$ とする．以下，G の辺彩色 $c : E \to [\Delta]$ を示す．G において，u_0 に接続する辺に彩色されていない色を $a \in [\Delta]$，また，v_0 に接続する辺に彩色されていない色を $b \in [\Delta]$ とする．（複数あれば任意の一つとする.）このとき，$a = b$ であれば，すべての $e \in E \setminus \{e_0\}$ について $c(e) = c'(e)$，更に，$c(e_0) = a$ とする．このとき，c が G の辺彩色になっていることは明らか．

$a \neq b$ のとき，v_0 を始点として，a で彩色された辺，b で彩色された辺を交互に辿る経路 $P = (v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots)$ を考える．

主張 6.4. 任意の $i, j \geq 0$ について $u_i \neq u_j$．また，任意の $i, j \geq 0$ について $v_i \neq v_j$.

証明. 背理法により示す． ■

問 6.31. この主張の証明を完成させなさい．

この主張より，経路 P について，以下の二つの場合が考えられる．

- ある $i \geq 1$ について u_i に接続する辺に b で彩色された辺がない．
- ある $j \geq 0$ について v_j に接続する辺に a で彩色された辺がない．

一つ目の場合を考える．（二つ目の場合も同様にして考えられる.）この場合，G の辺彩色 $c : E \to [\Delta]$ を次のようにする．$c(e_0) = a$ として，任意の $e \in E \setminus (E(P) \cup \{e_0\})$ について $c(e) = c'(e)$ とする．最後に，任意の $e \in P$ について，

$$c(e) \;=\; \begin{cases} a & : \quad c'(e) = b \\ b & : \quad c'(e) = a \end{cases}$$

この c が G の辺彩色になっていることは明らか．よって，$\chi'(G) = \Delta$ である．■

章末問題

以下の問いに答えなさい.

1. 以下を論理式を用いて示しなさい.
   (a) $G = (V, E)$ が完全グラフである.
   (b) $G = (V, E)$ が k-正則グラフである.
   (c) $G = (V, E)$ が二部グラフである.
   (d) グラフ $G = (V, E)$ に対して $\chi(G) \leq k$
   (e) グラフ $G = (V, E)$ に対して $\chi'(G) \leq k$
2. 以下のグラフに存在するハミルトン閉路の個数を求めなさい.（グラフの頂点は区別するものとする.）
   (a) 完全グラフ K_n.
   (b) 完全二部グラフ $G = (X, Y, E)$. ただし，$|X| = |Y| = n$ とする.
3. 以下の頂点彩色の個数（場合の数）を求めなさい.（グラフの頂点は区別するものとする.）
   (a) 完全グラフ K_n に対する n 彩色.
   (b) 完全二部グラフに対する 2 彩色.
   (c) n 頂点上の木に対する 2 彩色.
   (d) 奇数長閉路（n 頂点）に対する 3 彩色

問の略解

順列と組合せ

1. $5!/(2!3!) = 10$.
2. (a) 以下の式変形より示される.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

(b) 以下の式変形より示される.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))! \cdot (k-1)!} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(c) 以下の式変形より示される.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

3. 以下のことから全単射が示される.
   全射 : 重複組合せの任意の選び方について，対応する並べ方は少なくとも一つ存在する.
   単射 : 並べ方 σ が異なれば，対応する重複組合せも異なる.
4. $\binom{3+3-1}{3} = 10$. そのすべては,

$$(1,1,1),\ (1,1,2),\ (1,1,3),\ (1,2,2),\ (1,2,3),\ (1,3,3),\ (2,2,2),\ (2,2,3),\ (2,3,3),\ (3,3,3).$$

5. 変数 x_i のとる値を第 i 種のものを選ぶ個数とみればよい.

章末問題

1. (a) k^n, (b) n^k
2. (a) $\binom{n+k-1}{k}$, (b) $\binom{k-1}{n-1}$
3. (a) $\binom{n+k-1}{k}$, (b) $\binom{k-1}{n-1}$
4. $\binom{n-k+1}{k}$. 上の問題を利用する．配置の個数は, 方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n-k$, ただし, $x_1, x_{k+1} \geq 0$, $x_2, \ldots, x_k \geq 1$, を満たす解の個数に等しくなる．（着席させない座席は合計 $n-k$ 個あり, それらは $k+1$ 個のブロックに分かれる．変数 x_i は i 番目のブロックの着席させない座席の個数を表す．最初と最後のブロックは 0 個以上, それ以外のブロックには 1 個以上の座席がある．）
5. 任意の $X \subseteq A$ について, $X \in \mathcal{S}$ ならば $\bar{X} \notin \mathcal{S}$ より, $\mathcal{S}$ はサイズが高々 $|2^A|/2$ の部分集合にしかならない.
6. （a） k^n
   （b） $n!$
   （c） $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$
   （d） $\binom{k}{n}n!$
7. （a） $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ の第一項目を（順次）展開していく．

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1} \\
&\vdots \qquad \vdots \\
&= \binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\binom{k+2}{k-1}+\ \cdots\ +\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\binom{k+2}{k-1}+\ \cdots\ +\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-i-1}{k-1}.
\end{aligned}
$$

   最後から二つ目の等式は, $\binom{k}{k}=\binom{k-1}{k-1}$ による.

   （b） $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ の第二項目を（順次）展開していく．

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ \cdots \ + \binom{n-k+1}{2} + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k}{0} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ \cdots \ + \binom{n-k+1}{2} + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-i-1}{k-i}.
\end{aligned}
$$

最後から二つ目の等式は, $\binom{n-k}{0} = \binom{n-k-1}{0}$ による.

二項係数

1. (a) $a = b = 1$ とする.
   (b) $a = x,\ b = 1$ とする.
   (c) $a = 1,\ b = -1$ とする.
2. 分子 $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ に 0 の因子が表れるため.
3. 2 と 3. その理由は以下の式変形より示される.
   (b)

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.
\end{aligned}
$$

   (c)

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)\cdots(n-k) + (n-1)\cdots(n-k+1)k}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k+k)}{k!} \\
&= \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)n}{k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

4. 略.

5. 以下の等式変形より．

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\\ &= (-1)^k\frac{(n+k-1)(n+k)\cdots(n+1)n}{k!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k}.\end{aligned}$$

章末問題

1. (a) 以下の二項定理より導かれる．

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$$

(b) 以下の二項定理より明らか．

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}-\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^2-\binom{n}{3}2^3+\cdots+\binom{n}{n}2^n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-2)^i 1^{n-i}\\ &= ((-2)+1)^n\end{aligned}$$

2. 一つ目の等式は，次のように解釈することにより示される．$S = A \cup B$, $|A| = n, |B| = m$ として，S の中から k 個を選ぶ選び方は，A から i 個を B から $k-i$ 個を選ぶ選び方の，$i \in [k]\cup\{0\}$ に関する全体である．二つ目の等式は，$n = m = k$ として $\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$ を適用すれば示される．
3. 以下の式変形より示される．

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\\ &= \frac{\prod_{i\in[n]}(2n-2i+2)}{n!}\cdot\frac{\prod_{i\in[n]}(2n-2i+1)}{n!}\\ &= \frac{\prod_{i\in[n]}2(n-i+1)}{n!}\cdot\frac{\prod_{i\in[n]}(2n-2i+1)}{n!}\\ &= 2^n\cdot\frac{\prod_{i\in[n]}(2n-2i+1)}{n!}.\end{aligned}$$

4. (a)

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1} = n\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} = n2^{n-1}$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i i\binom{n}{i} \;=\; \sum_{i=1}^{n}(-1)^i i\cdot\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1} \;=\; n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1} \;=\; 0$$

5. 事実 2.3 と問 2.4 の二つ目の等式より，

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i} &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot(-1)^i\binom{i-n-1}{i} \quad (\because\ \text{事実 } 2.3)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{i-n-1}{i}\\ &= \binom{-n+k}{k} \quad (\because\ \text{問 } 2.4 \text{ の二つ目の等式})\\ &= (-1)^k\binom{n-1}{k}. \quad (\because\ \text{事実 } 2.3)\end{aligned}$$

鳩ノ巣原理

1. $n = 367$ として鳩ノ巣原理を適用する．
2. n 人いれば，知り合いの人数は 1 から $n-1$ までの $n-1$ 通りある．鳩ノ巣原理より，知り合いの人数が同じ人が存在する．
3. $(1,2),(3,4),\ldots,(2n-1,2n)$ のそれぞれを鳩ノ巣と見立てる．（よって，鳩ノ巣は n 個ある．）$[2n]$ から（任意に）選んだ $n+1$ 個の自然数を鳩と見立てれば，（鳩ノ巣原理より）その集合には連続する二つの自然数 $2k-1, 2k$ が存在することになる．連続する二つの自然数は互いに素である．
4. 以下のように，$b_1,\ldots,b_n$ を定義する．

$$\begin{aligned}b_1 &\overset{\text{def}}{=} a_1\\ b_2 &\overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2\\ &\vdots\\ b_n &\overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n\end{aligned}$$

ここで，$b_1,\ldots,b_n$ の中に n で割り切れるもの（それを b_i とする）があれば，$S = [i]$ とすればよい．そうでないとき，$c_i \equiv_n b_i$ とする．（$c_i \in [n-1]$.）鳩ノ巣原理より，ある $i, j \in [n]$（$i < j$）が存在して，$c_i = c_j$．これより，$b_j - b_i$ は n で割り切れる．よって，$S = [j] \setminus [i] \neq \emptyset$ とすればよい．
5. 全員が７０点未満であれば平均は７０点にならない．同様にして，全員が７０点より大きいのであれば平均は７０点にはならない．

6. 全員が $m/2$ 未満の委員会に所属するのであれば，生徒が所属する委員会の合計（延べ）は $nm/2$ 未満である．これは，委員会が $n/2$ 以上の生徒で構成されていることに反する．
7. $[n^2+1]$ を $[n]$ に分割しているので，平均の大きさは $(n^2+1)/n$ となる．大きさは整数なので，$\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$ 以上となる．
8. 最初の二つが $a_{i_1} < a_{i_2}$ であったとすると，$z_{i_1} \geq z_{i_2}+1$ となり $z_{i_1} = z_{i_2} = j$ であることに反する．（他の大小関係も同様.）

包除原理

1. $S_1 = A \setminus B$, $S_2 = B \setminus A$, $S_3 = A \cap B$ とする．（S_1, S_2, S_3 は $A \cup B$ の分割である.）$|A \cup B|$ を見積もるにあたり，$|A| + |B|$ において，S_1, S_2 はそれぞれ 1 回，S_3 は 2 回，数え上げられている．
2. 前問と同様にして，$A \cup B \cup C$ の分割 $S_1, \ldots, S_7$ を考える．
3. $a \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t$ かつ，任意の $i : t+1 \leq i \leq n$ について，$a \notin A_i$ より．
4. $\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq [t]$ のとき $a \in A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}$ であることから，任意の $i \in [t]$ について，$\{j_1, j_2, \ldots, j_i\} \subseteq [t]$ となる組合せの個数は $\binom{t}{i}$.
5. 正：１６，負：１５．
6. $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_i}$ は，$p_{j_1}, \ldots, p_{j_i}$ のいずれでも割り切れる自然数の集合であるので.
7. 略.
8. n と互いに素であるものの個数とそうでないものの個数の和は n となる.
9. $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$. このうち，素数でないものは，1, 49 のみ.
10. $k - i = i$ とすればよい.

母関数

1. 以下の等式より明らか.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \;=\; \frac{1}{1-x}.$$

2. 以下の等式より明らか.

$$-\ln(1-x) \;=\; -\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(-x)^i \;=\; -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1}(-1)^i \frac{x^i}{i} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i}.$$

3. $(a(x))^n$ を展開したときの x^k の項の生成は次のように考えられる．第 i 番目の $(1+x+x^2+\dots)$ からどの項を選んで掛け合わせたか．よって，i 番目から選んだ項の次数を r_i とすれば，x^k の係数の値は，$r_1+\cdots+r_n=k$ を満たす非負整数解の個数に等しくなる．
4. $(b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+\dots)(b_0x^1+b_1x^2+b_2x^3+\dots)$ を展開すると，x^1 の係数は b_0b_0，x^2 の係数は $b_0b_1+b_1b_0$，x^3 の係数は $b_0b_2+b_1b_1+b_2b_0$，x^4 の係数は $\dots$，のようになる．
5. (1) の場合，$\pi(n+1)=i, \pi(i)=n+1$ より，その二つ（要素 i と $n+1$）を除いた π は，$[n+1]\setminus\{i,n+1\}$ 上の完全置換とみなすことができる．(2) の場合，条件 $\pi(i)\neq n+1$ より，一つ（要素 $\pi(n+1)=i$）を除いた π は，（$n+1$ を i とみなすことで）$[n+1]\setminus\{i\}$ 上の完全置換とみなすことができる．
6. 等式 $d_{n+1}=n(d_n+d_{n-1})$ より，辺々 $x^i/i!$ をかけると，

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{i+1}\frac{x^i}{i!} \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot d_i\frac{x^i}{i!}+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot d_{i-1}\frac{x^i}{i!}$$

これより，

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{i+1}\frac{x^i}{i!} \;=\; x\sum_{i=1}^{\infty} d_i\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}+x\sum_{i=1}^{\infty} d_{i-1}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

更に，$d_1=0$ を用いれば，

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i\frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \;=\; x\sum_{i=1}^{\infty} d_i\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}+x\sum_{i=0}^{\infty} d_i\frac{x^i}{i!}$$

7. $D'(x)/D(x)=x/(1-x)$ より，

$$\int\frac{D'(x)}{D(x)}dx \;=\; \int\frac{x}{1-x}dx.$$

ここで，

$$\int\frac{D'(x)}{D(x)}dx=\ln D(x)+c_1$$

$$\int\frac{x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx \;=\; -x-\ln(1-x)+c_2$$

よって，

$$\ln D(x) \;=\; -x-\ln(1-x)+c.$$

$x=0$ のとき $D(0)=d_0=1$ より，$c=0$．よって，

$$D(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x-\ln(1-x)} \;=\; \frac{e^{-x}}{1-x}$$

6. グラフ

1. $|E| \le \binom{|V|}{2} = |V|(|V|-1)/2$ より．
2. 頂点の次数はそれぞれの辺の両端点で数え上げられる．（よって，定理が示される．）定理の等式より，次数の合計は偶数となる．次数が偶数である頂点の次数の合計は偶数である．この事実より系が示される．
3.
   - 最長経路：$(1,2,4,5,3)$．（$(1,3,5,4,2)$, $(2,4,5,3,1)$ なども．）
   - 最長閉路：$(1,2,4,5,3,1)$．（$(1,3,5,4,2,1)$, $(2,4,5,3,1,2)$ なども．）
4. 事実 3 は，$d(u,v) \le d(v,u)$ かつ $d(u,v) \ge d(v,u)$ を示す．事実 4 は，u から w へのパス，w から v へのパスがあることから，更に，距離が経路の長さの最小であることから示される．
5. 完全グラフの辺は頂点の全対であるため．
6. 定理 6.1 より，$\sum_{u \in V} |N(u)|/2 = kn/2$.
7. G が連結であることから，任意の頂点は u からの経路が存在する．よって，任意の頂点 $v \in V$ について，$v \in X$ または $v \in Y$ が成り立つ．（$X \cup Y = V$.）また，X, Y の定義より，$v \in X$ かつ $v \in Y$ となる頂点 $v \in V$ は存在しない．（$X \cap Y = \emptyset$.）
8. $|E(P_1)| \equiv_2 1$, $|E(P_2)| \equiv_2 1$ となり，閉路の長さは奇数となる．
9. $|E| = |X| \cdot |Y|$.
10. 背理法により示す．任意の辺 $(u,v) \in E \setminus E(C)$ について $u, v \notin V(C)$ とする．これは，G が連結であることに矛盾する．
11. 2-正則グラフはハミルトングラフである．
12. ハミルトングラフでない 3-正則グラフが存在する．（例えば，ペテルセングラフ．）
13. 必要条件となっていない．（頂点の個数が 5 の 2-正則グラフが反例となっている．）
14. 最初の二つは背理法により示す．それぞれそうでないと仮定すれば，G に閉路が存在することになり，G が木であることに矛盾する．三つ目は，一つ目から導かれる．
15. そうでなければ G が木にならないので．
16. 任意の頂点 $u, v \in V$ について，G 上の任意の経路 P を考える．$e_1 \notin E(P)$ であれば，G_1 においても u, v は連結している．$e_1 \in E(P)$ であれば，$E(C) \setminus \{e_1\}$ を用いることにより，u, v を連結させることができる．
17. そうでなければ，$2(|V|-1) = 2|E| = \sum_{u \in V} |N(u)| \ge 2(|V|-1)+1$ となり矛盾する．
18. w' を w の祖先とする．w' から w への経路があり，w から u, v への経路があれ

ば，w' から u, v への経路はあるので.

19. $(u, r) \in E$ となる頂点 $u \in V$ は存在しないので，根 r の入り次数は 0 となる．それ以外の頂点の入り次数は 1 となる．（そうでなければ，T が木であることに反するので.）また，葉は子を持たない頂点なので出次数は 0 となる.
20. $|B| = |A| + 1$.
21. T の深さを k としたとき，$n = 2^{k+1} - 1$ であることから.
22. $U = X$ の場合を含めると，仮定より後者が常に成り立つことになるので.
23. $\forall U \subsetneq X[|U| < |N(U)|]$ より, 任意の $U \subseteq X \setminus \{x_n\}$ について, $|U| \leq |N(U)| - 1 \leq |N(U) \setminus \{y_n\}| = |N_{G'}(U)|$ だから.
24. $\forall U \subseteq S[|U| \leq |N_{G_1}(U)|]$ より．ただし，$N_{G_1}(U) = N(U) \cap T$.
25. 背理法により示す．ある $U' \subseteq S'$ に対して $|U'| > |N_{G_2}(U')|$ であるとする．このとき，$|N(S \cup U')| = |T| + |N_{G_2}(U')| < |S| + |U'| = |S \cup U'|$．これは，$\forall U \subseteq X[|U| \leq |N(U)|]$ に矛盾する.
26. K_n は n，完全二部グラフは 2，奇数長閉路は 3，木は 2．ペテルセングラフは 3.
27. 略.
28. ある辺をある色で彩色すると，その両端点に接続する辺はその色で彩色することはできない．このことから，任意の頂点について，その頂点に接続する辺に必要な彩色数は次数以上となる.
29. 略.
30. 最大次数 Δ である頂点に接続する辺はすべて異なる色で彩色する必要があるため.
31. ある $i, j : i \neq j$ について $u_i = u_j$ であれば，c が辺彩色であることに反する．（v_i, v_j についても同様.）

章末問題

1. (a) $\forall u, v \in V[u \neq v \Rightarrow (u, v) \in E]$
   (b) $\forall v \in V[|N(v)| = k]$
   (c) $\exists X, Y \subseteq V[(X \cup Y = V) \wedge (X \cap Y = \emptyset) \wedge (E(G[X]) = E(G[Y]) = \emptyset)]$
   (d) $\exists f : V \to [k], \forall u, v \in V[(u, v) \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)]$
   (e) $\exists f : E \to [k], \forall u, v, w \in V[(e = (u, v) \in E \wedge e' = (u, w) \in E) \Rightarrow f(e) \neq f(e')]$
2. (a) $\frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$
   (b) $\frac{n! \cdot n!}{2n} = \frac{n! \cdot (n-1)!}{2}$
3. (a) $n!$

(b) 2

(c) 2

(d) $n=2k+1$ としたとき $2(4^k-1)$．求め方は以下のよう．

証明. 彩色を $\{a,b,c\}$ とする．まず，「パスグラフ P_n の3彩色」を考える．P_n の頂点番号を順に $0,1,\ldots,2k$ とする．頂点番号0の彩色が a である場合を考える．(b,c であるときも同様.) このとき，頂点番号2の彩色は，a であるときが2通り ($f(0,1,2)=(a,b,a),(a,c,a)$)，b,c であるときがそれぞれ1通り ($f(0,1,2)=(a,c,b),(a,b,c)$) となる．一般に，頂点 $2i$ の彩色が a,b,c である場合の数を a_i,b_i,c_i としたとき，$a_0=1, b_0=c_0=0$ かつ，

$$\begin{array}{rcl} a_{i+1} & = & 2a_i+b_i+c_i \\ b_{i+1} & = & a_i+2b_i+c_i \\ c_{i+1} & = & a_i+b_i+2c_i \end{array}$$

よって，

$$a_{i+1}+b_{i+1}+c_{i+1} \;=\; 4(a_i+b_i+c_i).$$

これより，$a_k+b_k+c_k=4^k$．これは，頂点番号0の彩色が a である場合，P_n の3彩色の個数が 4^k であることを意味する．(単純な計算，$2^{2k}=4^k$，に一致する.) 更に，($b_i=c_i$ より $a_{i+1}-b_{i+1}=a_i-b_i$ であるので)

$$a_i \;=\; b_i+1 \;=\; c_i+1.$$

よって，

$$a_k=\frac{4^k+2}{3}, \quad b_k+c_k=\frac{2\cdot(4^k-1)}{3}.$$

これより，頂点番号0の彩色が a である場合，C_n の3彩色の個数は $b_k+c_k=2(4^k-1)/3$ であることを意味する．頂点番号0の彩色が b,c であるときも同様なので，C_n の3彩色の個数は $2(4^k-1)$ となる． ■

参考図書

本テキストは，組合せ論のごく一部（の初歩的なこと）しか扱っていない．組合せ論について更に学びたい学生は，以下の教科書や，そこであげられている参考図書を参照するとよい．

1. 離散数学入門，守屋悦朗著，サイエンス社，２００６年.
2. 情報数学，浅野孝夫著，コロナ社，２００９年.
3. グラフ理論入門，ロビン・ウィルソン著，西関隆夫訳，２００１年.

索引

C
CNF, 94

D
DNF, 94

あ
入次数, 50
円順列, 2
オイラー関数, 21
オイラーグラフ, 43
オイラー経路, 43
オイラー閉路, 43
大きさ, 78
親, 49

か
外延的記法, 78
カタラン数, 30
含意, 95
完全グラフ, 38
完全二部グラフ, 42
完全二分木, 51
完全マッチング, 52
偽, 89
木, 46
距離, 36
空集合, 78
経路, 35
経路グラフ, 38
経路の長さ, 35
限定子, 97
言明, 89
子, 49
恒真, 94

さ
サイズ, 78
差集合, 82
次数, 34
指数母関数, 25
子孫, 49
集合, 77
集合族, 84
述語, 96
順列, 1
真, 89
真部分集合, 79
真理値表, 90
真理値割り当て, 93
正則グラフ, 40
積集合, 81
積和標準形, 94
全域木, 48
全称記号, 96
全称命題, 96
先祖, 49
全体集合, 80
属さない, 77
属する, 77
存在記号, 96
存在命題, 96

た
対称差集合, 82
単純経路, 35
単純閉路, 35
頂点, 33
頂点彩色, 54
頂点彩色可能, 54
頂点彩色数, 54
重複組合せ, 5
重複順列, 4
出次数, 50
同値, 93, 95

な
内包的記法, 78
二部グラフ, 41
二分木, 50
根, 49
根付き木, 49

は
葉, 49
排他的論理和, 95
パス, 35
ハミルトングラフ, 45
ハミルトン経路, 45
ハミルトン閉路, 45
否定, 90
深さ, 49
含まれる, 79
部分グラフ, 37

部分集合, 79
分割, 85
閉路, 35
閉路グラフ, 38
閉路の長さ, 35
べき集合, 84
辺, 33
辺彩色, 56
辺彩色可能, 56
辺彩色数, 56
母関数, 25
補集合, 80

ま
マッチング, 52
無限集合, 78
無向グラフ, 33
無向辺, 33
矛盾, 94
命題, 89

や
有限集合, 78
有向グラフ, 33
有向辺, 33
誘導部分グラフ, 37
要素, 77

ら
量化子, 97
隣接する, 34
連結グラフ, 36
連結している, 35
論理関数, 93
論理式, 90, 97
論理積, 90
論理変数, 90
論理和, 90

わ
和集合, 81
和積標準形, 94
割り当て, 93

付　録

付録 A

集合

A.1　集合とは

定義 A.1

「もの」の集まりのことを**集合**という．集合を成すものを**要素**という．

定義 A.2

A を集合とする．a が A の要素であるとき，a は A に**属する**といい，$a \in A$ と表す．また，a が A の要素でないとき，a は A に**属さない**といい，$a \notin A$ と表す．

例 A.1 (属する，属さない)**.** A を5つの自然数 $1, 2, 3, 4, 5$ からなる集合とする．このとき，$1 \in A$ であり，$0 \notin A$ である．

問 A.1. A を 1 から 999 までの自然数の集合とする．このとき，$-1 \in A$, $10 \notin A$, $1000 \in A$ のうち，正しいものはどれか.

問 A.2. A を首都の集合とする．このとき, ニューヨーク $\in A$, 東京 $\notin A$, ヨーロッパ $\in A$ のうち，正しいものはどれか.

定義 A.3

数の集合の表記としては，以下のものがよく使われる．

$$
\begin{array}{lcl}
\mathbb{N} & : & \text{自然数（natural）の集合} \\
\mathbb{Z} & : & \text{整数（integer）の集合} \\
\mathbb{Q} & : & \text{有理数（rational）の集合} \\
\mathbb{R} & : & \text{実数（real）の集合}
\end{array}
$$

また，$\mathbb{N}_0$ を「0を含めた自然数の集合」とする．

定義 A.4

集合を表すとき，要素すべてを列挙する表し方を**外延的記法**といい，要素のもつ性質を明記する表し方を**内包的記法**という．

例 A.2 (外延的記法，内包的記法)**.** 5つの自然数 $1, 2, 3, 4, 5$ からなる集合は，以下の二通りに表される．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{外延的記法} & : & \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
\text{内包的記法} & : & \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 5\}
\end{array}
$$

問 A.3. 素数の集合，一桁の正の偶数の集合，首都の集合を，外延的記法または内包的記法で表しなさい．

注 A.1. 単に集合といった場合，要素は重複しないものとする．例えば，集合 $\{1, 2, 3, 1, 1, 3\}$ は集合 $\{1, 2, 3\}$ に同じである．また，要素の順序は気にしない．例えば，集合 $\{2, 1, 3\}$ は集合 $\{1, 2, 3\}$ に同じである．

定義 A.5

A を集合とする．A の要素の個数を A の**大きさ**（または**サイズ**）といい，$|A|$ と表す．大きさが 0 の集合，つまり，要素のない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ と表す．大きさが有限の集合を**有限集合**，無限の集合を**無限集合**という．

例 A.3 (集合の大きさ)**.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．このとき，$|A| = 5$ である．よって，A は有限集合である．一方，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ はすべて無限集合である．

A.2　部分集合

定義 A.6

A, B を集合とする．A のすべての要素が B の要素であるとき，A は B に**含まれる**という．このとき，A は B の**部分集合**であるといい，$A \subset B$ または $A \subseteq B$ と表す．そうでないとき，$A \not\subset B$ または $A \not\subseteq B$ と表す．

A と B が同一の集合であるとき $A = B$ と表す．（厳密には，$A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ であるとき $A = B$ と表す．）そうでないとき $A \neq B$ と表す．（厳密には，$A \not\subseteq B$ または $A \not\supseteq B$ であるとき $A \neq B$ と表す．）

$A \subseteq B$ かつ $A \neq B$ であるとき，A は B の**真部分集合**であるといい，特に，$A \subsetneq B$ と表す．（このとき，$A \subseteq B$ と表しても間違いではない．）

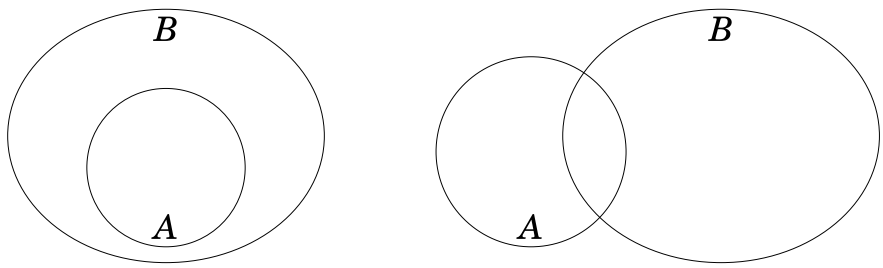


図 A.1: ベン図：$A \subseteq B$（左図）と $A \not\subseteq B$（右図）

例 A.4 (部分集合，真部分集合)**.** $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．$A = \{1, 2, 5\}$ であるとき，$A \subseteq B$ であり，また $A \subsetneq B$ でもある．（$A \not\subseteq B$ ではない．）

事実 A.1. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.（同時に，$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ でもある．）

問 A.4. A を任意の集合とする．以下のうち正しいものはどれか．

(1)　$A \subseteq A$　(2)　$A \not\subseteq A$　(3)　$A \subsetneq A$　(4)　$\emptyset \subseteq \emptyset$　(5)　$\emptyset \subseteq A$

A.3　補集合

定義 A.7

考える対象となる全体の集合を**全体集合**という．U を全体集合，A を U の部分集合とする．このとき，A に属さない U の要素の集合を A の**補集合**といい，$\bar{A}$ と表す．つまり，

$$\bar{A} \overset{\text{def}}{=} \{a \in U : a \notin A\}.$$

以降，$X \overset{\text{def}}{=} Y$ を「X の定義は Y である」ことを意味するものとする*1．

例 A.5 (補集合)**.** $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を全体集合とする．$A = \{1, 2, 5\}$ のとき，$\bar{A} = \{3, 4\}$．

問 A.5. 全体集合を $\mathbb{Z}$ とする．$\mathbb{E}$ を偶数の集合とする．このとき，$\overline{\mathbb{E}}$ は何か．

事実 A.2. U を全体集合，A を U の部分集合とする．このとき，

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

命題 A.1. U を全体集合，A, B を U の部分集合とする．このとき，$A \subseteq B$ であるときかつそのときに限り，$\bar{B} \subseteq \bar{A}$ である．

証明. この命題を示すためには，以下の二つを示せばよい．

1. $A \subseteq B$ であるとき，$\bar{B} \subseteq \bar{A}$ である
2. $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ であるとき，$A \subseteq B$ である

一つ目はベン図を用いて示される．二つ目は一つ目を用いて次のように示される．まず，記号が混同しないように，一つ目を以下のように（A, B でなく）X, Y を用いて表記する．

$$X \subseteq Y \text{ であるとき，} \bar{Y} \subseteq \bar{X} \text{ である} \quad \cdots \quad (*)$$

上の $(*)$ において，$X = \bar{B}, Y = \bar{A}$ と定義する．このとき，（もともとの）仮定 $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ より，$X \subseteq Y$ となり，$(*)$ の仮定が成り立つ．よって，その結論である $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$ が成り

*1 “def” とは definition（定義）の頭文字 3 文字である．

立つ．$X = \bar{B}, Y = \bar{A}$ としたことから，$\bar{X} = B, \bar{Y} = A$ となる．これを $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$ に代入すれば $A \subseteq B$ が得られる． ■

A.4　和集合，積集合

定義 A.8

A, B を集合とする．A と B の少なくとも一方に属する要素の集合を，A と B の**和集合**といい，$A \cup B$ と表す．A と B の両方に属する要素の集合を，A と B の**積集合**といい，$A \cap B$ と表す．つまり，

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & \stackrel{\text{def}}{=} & \{x : x \in A \text{ または } x \in B\}, \\ A \cap B & \stackrel{\text{def}}{=} & \{x : x \in A \text{ かつ } x \in B\}. \end{array}$$

例 A.6 (和集合，積集合)**.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 5, 10, 11\}$ とする．このとき，

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 11\}, \\ A \cap B & = & \{1, 5\}. \end{array}$$

問 A.6. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ とする．このとき，$A \cup B, A \cap B$ を求めなさい．

命題 A.2 (分配則)**.** A, B, C を集合とする．このとき，

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

証明. ベン図より明らか． ■

命題 A.3. A, B を集合とする．このとき，

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

証明. ベン図より明らか． ■

定義 A.9

A, B を集合とする．A から B を除いた集合を A と B の**差集合**といい，$A \setminus B$ と表す．A と B のどちらか一方だけに属する要素の集合を A と B の**対称差集合**といい，$A \oplus B$ と表す．つまり，

$$\begin{aligned} A \setminus B &\overset{\text{def}}{=} \{x : x \in A \text{ かつ } x \notin B\}, \\ A \oplus B &\overset{\text{def}}{=} \{x : (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } x \notin A \cap B\}. \end{aligned}$$

例 A.7 (差集合，対称差集合)**.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{1, 5, 10, 11\}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{2, 3, 4\}, \\ A \oplus B &= \{2, 3, 4, 10, 11\}. \end{aligned}$$

問 A.7. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ とする．このとき，$A \setminus B$, $A \oplus B$ を求めなさい．

命題 A.4. A, B を集合とする．このとき，

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

証明. ベン図より明らか. ■

A.5　ド・モルガンの法則

定理 A.5 (ド・モルガンの法則)**.** U を全体集合，A, B を U の部分集合とする．このとき，

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

証明. ベン図より明らか. ■

定理 A.6 (ド・モルガンの法則（一般形）). k を任意の自然数とする．U を全体集合，$A_1, \ldots A_k$ を U の部分集合とする．（つまり，$A_1, \ldots, A_k \subseteq U$.）このとき，

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k} &= \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_k \\ \overline{A_1 \cap \cdots \cap A_k} &= \bar{A}_1 \cup \cdots \cup \bar{A}_k \end{aligned}$$

証明. 一つ目の等式を数学的帰納法により示す．（二つ目の等式も同様にして示される．）$k = 1$ のとき，等式が成り立つのは明らかである．$k - 1$（$k \geq 2$）のとき，等式が成り立つとする．つまり，

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}} = \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{k-1}. \tag{A.1}$$

また，ド・モルガンの法則より，任意の集合 A, B について，

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \tag{A.2}$$

この二つの等式より，

$$\begin{aligned} \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k} &= \overline{(A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) \cup A_k} \\ &= \overline{(A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1})} \cap \bar{A}_k \quad (\because\ (A.2)) \\ &= \left(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{k-1}\right) \cap \bar{A}_k \quad (\because\ (A.1)) \\ &= \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_k. \end{aligned}$$

■

定義 A.10

任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$X = \{1, 2, \ldots, k\}$ とする．任意の $i \in X$ について，A_i を集合とする．このとき，

$$\bigcup_{i \in X} A_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

$$\bigcap_{i \in X} A_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$$

この表記に従えば，ド・モルガンの法則（一般形）は次のように表される．$X = \{1, 2, \ldots, k\}$ として，

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i \in X} A_i} &= \bigcap_{i \in X} \bar{A}_i \\ \overline{\bigcap_{i \in X} A_i} &= \bigcup_{i \in X} \bar{A}_i \end{aligned}$$

A.6　集合族

定義 A.11

集合の集まり（集合の集合）のことを**集合族**という．

例 A.8 (集合族)**.**

1. $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$,
2. $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$,
3. $\{\{a\},\{e\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,d,e\},\{a,b,c,d,e\}\}$.

問 A.8. $\emptyset$ を空集合とする．$\emptyset$ と $\{\emptyset\}$ はどう違うか．（参考までに，$|\emptyset|$, $|\{\emptyset\}|$ を比較しなさい．）

問 A.9. 以下のうち正しいものはどれか．

(1) $\emptyset \in \emptyset$	(2) $\emptyset \subseteq \emptyset$	(3) $\emptyset \in \{\emptyset\}$	(4) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(5) $1 \in 1$	(6) $1 \subseteq 1$	(7) $1 \in \{1\}$	(8) $1 \subseteq \{1\}$
(9) $\{1\} \in \{1\}$	(10) $\{1\} \subseteq \{1\}$	(11) $\{1\} \in \{\{1\}\}$	
(12) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$	(13) $1 \in \{1,\{1\}\}$	(14) $1 \subseteq \{1,\{1\}\}$	
(15) $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$	(16) $\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$		

定義 A.12

A を集合とする．A の部分集合のすべてからなる集合を A の**べき集合**といい，2^A と表す．

例 A.9 (べき集合)**.** $A=\{1,2,3\}$ とする．このとき，

$$2^A = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

問 A.10. $A=\{0,1\}$ とする．このとき，2^A を求めなさい．

事実 A.3. A を集合とする．$B \in 2^A$ と $B \subseteq A$ は同じことである．

命題 A.7. 任意の有限集合 A について，$|2^A| = 2^{|A|}$.

証明. $S \subseteq A$ を A の任意の部分集合とする．集合 S を，それぞれの $a \in A$ について，a が S に入らないとき 0，a が S に入るとき 1，とした 0/1 の列とみたてる．このとき，集合 2^A を，長さ $|A|$ の 0/1 の列の集合とみなすことができる．長さ $|A|$ の 0/1 の列が $2^{|A|}$ 個あることより，命題が示される． ■

例 A.10. $A = \{1, 2, 3\}$ としたとき，$|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$．以下の表で示されるように，0/1 の列と A の部分集合が対応付けられる．

1	2	3	2^A
0	0	0	$\emptyset$
1	0	0	$\{1\}$
0	1	0	$\{2\}$
0	0	1	$\{3\}$
1	1	0	$\{1, 2\}$
1	0	1	$\{1, 3\}$
0	1	1	$\{2, 3\}$
1	1	1	$\{1, 2, 3\}$

問 A.11. $2^\emptyset$ を求めなさい．（上の命題より，$|2^\emptyset| = 2^0 = 1$.）

A.7　集合の分割

定義 A.13

A を集合とする．$A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq A$ が以下を満たすとき，$A_1, A_2, \ldots, A_k$ を A の**分割**という．

1. $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$,
2. すべての $i, j : i \neq j$ について $A_i \cap A_j = \emptyset$.

例 A.11 (分割)**.** $\mathbb{E}$ を偶数の集合，$\mathbb{O}$ を奇数の集合とすれば，$\mathbb{E}, \mathbb{O}$ は $\mathbb{Z}$ の分割である．

問 A.12. $\mathbb{Z}$ の分割となる例をあげなさい.

章末問題

以下の問いに答えなさい．

1. 以下の集合を内包的記法で表記しなさい．
   (a) -5 から 10 までの整数の集合
   (b) 無理数の集合
   (c) 都道府県庁所在地の集合
   (d) 3 で割ったら 2 余る自然数の集合
   (e) 60 の約数のうち，12 以下の自然数の集合
2. 上の問題の集合のうち有限集合はどれか．また，有限集合であればその大きさを求めなさい．
3. 以下のうち正しいものはどれか．

1. $\{5\} \in \{2,3,5,\{7\}\}$	2. $\{5\} \subseteq \{2,3,5,\{7\}\}$
3. $\{7\} \in \{2,3,5,\{7\}\}$	4. $\{7\} \subseteq \{2,3,5,\{7\}\}$
5. $\{\{5\}\} \subseteq \{2,3,5,\{7\}\}$	6. $\{\{7\}\} \subseteq \{2,3,5,\{7\}\}$
7. $\{a,d\} \in \{a,b,c,\{a,d\}\}$	8. $\{a,d\} \subseteq \{a,b,c,\{a,d\}\}$
9. $\{a,\{a,d\}\} \in \{a,b,c,\{a,d\}\}$	10. $\{a,\{a,d\}\} \subseteq \{a,b,c,\{a,d\}\}$
11. $\emptyset \subseteq \emptyset$	12. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

4. $U = \{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq 10\}$ を全体集合とする．また，$A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, $C = \{1,3,5,7,9\}$ とする．このとき，以下を求めなさい．
   (a) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$
   (b) $\overline{A \cup B \cup C}$
   (c) $\overline{A \cap B \cap C}$
   このとき，(b), (c) について，ド・モルガンの法則が成り立つことを確認しなさい．
5. 2 で割り切れる整数の集合を A，3 で割り切れる整数の集合を B とする．このとき，以下の集合を内包的記法で表記しなさい．
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \oplus B$
6. $A = \{a,b,c\}$ とする．このとき，A のべき集合を求めなさい．
7. $|A| = n$ とする．このとき，A のべき集合の大きさはいくらか．

付録 B

論理

B.1　命題とは

（おおざっぱに言って，）ある事柄を述べたものを**言明**といい，それが（万人にとって）正しければ**真**（**true**）であるといい，そうでなければ**偽**（**false**）であるという．

定義 B.1

「真」か「偽」のどちらか一方に一意に定められる言明を**命題**という．

例 B.1 (命題)**.** 以下はすべて命題である．

1. 1 たす 1 は 2 である．（真である．）
2. 1 たす 1 は 3 である．（偽である．）
3. A を集合，$R \subseteq A^2$ を同値関係とした場合，A/R は A の分割である．（真である．）

一方，次のようなものは命題で**ない**．

1. 離散数学は難しい．
2. $x + y = 1$ は成り立つ．

問 B.1. 以下のうち命題であるものどれか．（ただし，いずれも $a, b \in \mathbb{R}$.）

1. 一次関数 $y = x + b$ の（x-y 座標における）直線は，点 $(x, y) = (1, b-1)$ を通る．
2. 関数 x^a を x について微分した式は ax^{a-1} である．
3. x についての二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解をもつ．

B.2　命題論理

真を **1**，偽を **0** と表す．0 または 1 を値にとる変数を**論理変数**という[*1]．論理変数の演算には次のようなものがある．

定義 B.2

x, y を論理変数とする．$x \vee y$ を x と y の**論理和**といい，「x または y」を意味する．$x \wedge y$ を x と y の**論理積**といい，「x かつ y」を意味する．$\bar{x}$ を x の**否定**といい，「x でない」を意味する．これらを**真理値表**で表すと以下のようになる．

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

注 B.1. 論理和について，x が 1 であれば $\underline{y\text{ の値によらず}}$ $x \vee y$ は真となる．論理積について，x が 0 であれば $\underline{y\text{ の値によらず}}$ $x \wedge y$ は偽となる．

問 B.2. x, y, z を論理変数とする．論理和 $x \vee y \vee z$，論理積 $x \wedge y \wedge z$ の真理値表をそれぞれ示しなさい．

事実 B.1. 一般に，k 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 上の論理和・論理積について，

- $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$: $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ のときかつそのときに限り偽．逆に，一つでも 1 の変数があれば（他の変数の 0/1 にかかわらず）真．
- $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$: $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$ のときかつそのときに限り真．逆に，一つでも 0 の変数があれば（他の変数の 0/1 にかかわらず）偽．

定義 B.3

論理変数，$\vee$, $\wedge$, 及び否定で表される式を，**命題論理による論理式**または単に**論理式**という．厳密には，以下のように帰納的に定義される．

[*1] ここでは，次のようにして，論理変数は命題を表す変数とみなす：x を論理変数とする．$x = 1$ は「命題 x が真である」ことを，$x = 0$ は「命題 x が偽である」ことを意味する．

1. 論理変数自体は論理式である．
2. x, y が論理式である場合，$x \vee y$, $x \wedge y$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ は論理式である．

論理式 φ が論理変数 $x_1, \ldots, x_n$ からなるとき，φ を $x_1, \ldots, x_n$ **上の論理式**という．

例 B.2 (論理式)**.** 以下のものはすべて論理式である．

1. x.
2. $x \vee \bar{y}$.
3. $((x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1 \vee \bar{x}_3})) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$.

問 B.3. 以下の論理式の真理値表をそれぞれ示しなさい．

- $x \vee \bar{y}$
- $x \vee (y \wedge z)$

注 B.2. 論理積の記号 $\wedge$ は省略されることがある．例えば，$x \vee (y \wedge z)$ は $x \vee (yz)$ と表記される．また，演算記号の結合の強さによってカッコは省略されることがある．例えば，結合は $\vee$ より $\wedge$ の方が強いことから，$x \vee (yz)$ は $x \vee yz$ と表記される．

定理 B.1 (分配則)**.** x, y, z を論理変数とする．このとき，

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

証明. 真理値表より明らか． ■

B.3　ド・モルガンの法則（命題論理）

定理 B.2 (ド・モルガンの法則)**.** x, y を論理変数とする．このとき，

$$\begin{aligned} \overline{x \vee y} &= \bar{x} \wedge \bar{y} \\ \overline{x \wedge y} &= \bar{x} \vee \bar{y} \end{aligned}$$

証明. 真理値表より明らか. ■

定理 B.3 (ド・モルガンの法則（一般形）). $x_1, \ldots, x_k$ を論理変数とする．このとき，

$$\begin{aligned}\overline{x_1 \vee \cdots \vee x_k} &= \bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_k \\ \overline{x_1 \wedge \cdots \wedge x_k} &= \bar{x}_1 \vee \cdots \vee \bar{x}_k\end{aligned}$$

証明. 数学的帰納法より示す．（定理 A.6 の証明を参照.） ■

定義 B.4

任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$A = \{1, 2, \ldots, k\}$ とする．任意の $i \in A$ について，x_i を論理変数とする．このとき，

$$\bigvee_{i \in A} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$$

$$\bigwedge_{i \in A} x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_k$$

この表記に従えば，ド・モルガンの法則（一般形）は次のように表される．$A = \{1, 2, \ldots, k\}$ として，

$$\begin{aligned}\overline{\bigvee_{i \in A} x_i} &= \bigwedge_{i \in A} \bar{x}_i \\ \overline{\bigwedge_{i \in A} x_i} &= \bigvee_{i \in A} \bar{x}_i\end{aligned}$$

問 B.4. ド・モルガンの法則を用いて，以下の論理式を否定記号が複数の変数にまたがらない形にしなさい．

- $\overline{x \vee yz}$
- $\overline{(x \vee y)(x \vee z)}$

B.4　論理関数

定義 B.5

φ を論理変数 $x_1, \ldots, x_n$ 上の論理式とする．任意の $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ について，$(x_1, \ldots, x_n) = (a_1, \ldots, a_n)$ と代入することを（$x_1, \ldots, x_n$ への）**真理値割り当て**または単に**割り当て**という．このとき，φ の真理値を $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と表記する．

例 B.3 (割り当て)**.** $\varphi = x \vee yz$ とする．このとき，

1. $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ の割り当てに対して $\varphi(0, 1, 0) = 0$.
2. $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ の割り当てに対して $\varphi(1, 0, 0) = 1$.

事実 B.2. 真理値表は，真理値割り当てを表にしたものである．

命題 B.4. φ を論理変数 $x_1, \ldots, x_n$ 上の論理式とする．このとき，φ は $\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}$ への（$x_1, \ldots, x_n$ 上の）関数となる．

証明. 命題論理による論理式の定義より，変数 $x_1, \ldots, x_n$ への<u>任意の</u>割り当てについて，論理式 φ の値（0 または 1 の）が<u>一意に</u>定められることから示される．（関数の定義を参照．） ■

定義 B.6

$\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}$ への関数を**論理関数**という．

以降では，論理変数 $x_1, \ldots, x_n$ 上の論理式 φ は，$x_1, \ldots, x_n$ 上の論理関数として扱い，$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ と表記する．

定義 B.7

φ, φ' を論理変数 $x_1, \ldots, x_n$ 上の論理関数とする．任意の $a \in \{0,1\}^n$ について $\varphi(a) = \varphi'(a)$ であるとき，φ と φ' は**同値**であるといい，$\varphi \equiv \varphi'$ と表す．（単に，$\varphi = \varphi'$ と表すこともある．）

定義 B.8

φ を論理変数 $x_1, \dots, x_n$ 上の論理関数とする．任意の $a \in \{0,1\}^n$ について $\varphi(a) = 1$ であるとき，φ は**恒真**であるといい，$\varphi \equiv 1$ と表す．（単に，$\varphi = 1$ と表すこともある．）

また，任意の $a \in \{0,1\}^n$ について $\varphi(a) = 0$ であるとき，φ は**矛盾**であるといい，$\varphi \equiv 0$ と表す．（単に，$\varphi = 0$ と表すこともある．）

例 B.4 (恒真，矛盾)**.** $x \vee \bar{x}$ は恒真であり，$x \wedge \bar{x}$ は矛盾である．（$\overline{x \vee \bar{x}} \equiv x \wedge \bar{x}$.）また，$\bar{y} \vee \bar{z} \vee yz$ は恒真であり，$yz(\bar{y} \vee \bar{z})$ は矛盾である．（$\overline{\bar{y} \vee \bar{z} \vee yz} \equiv yz(\bar{y} \vee \bar{z})$.）

問 B.5. 以下の論理式が恒真であることを示しなさい．

- $\bar{y} \vee \bar{z} \vee yz$
- $\overline{x \vee yz} \vee (x \vee y)(x \vee z)$

B.5　標準形論理式

定義 B.9

ℓ_i^j を論理変数またはその否定とする．以下のような形式の論理式を**和積標準形**（CNF）という．

$$(\ell_1^1 \vee \ell_2^1 \vee \ell_3^1 \vee \cdots) \wedge (\ell_1^2 \vee \ell_2^2 \vee \ell_3^2 \vee \cdots) \wedge (\ell_1^3 \vee \ell_2^3 \vee \ell_3^3 \vee \cdots) \wedge \cdots .$$

また，以下のような形式の論理式を**積和標準形**（DNF）という．

$$(\ell_1^1 \wedge \ell_2^1 \wedge \ell_3^1 \wedge \cdots) \vee (\ell_1^2 \wedge \ell_2^2 \wedge \ell_3^2 \wedge \cdots) \vee (\ell_1^3 \wedge \ell_2^3 \wedge \ell_3^3 \wedge \cdots) \vee \cdots .$$

例 B.5 (CNF, DNF)**.** 以下は，論理変数 x, y, z 上の CNF, DNF 論理式である．

$$\begin{array}{lcl} \text{CNF} & : & x(\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}). \\ \text{DNF} & : & xy \vee xz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}. \end{array}$$

命題 B.5. 任意の論理式は，和積標準形（ＣＮＦ）及び積和標準形（ＤＮＦ）論理式で表される．

証明. 命題 B.4 より，任意の論理式はある論理関数である．任意の論理関数は和積標準形

及び積和標準形で表される．（詳細は略．問 B.6 を参照．）　■

問 B.6. 以下の表で表された論理関数 $f:\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ を，和積標準形（CNF）及び積和標準形（DNF）で表しなさい．

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

B.6　含意，同値

定義 B.10

x, y を論理変数（論理関数）とする．$x \oplus y$ を x と y の**排他的論理和**といい，「x または y のどちらか一方（のみ）」を意味する．$x \Rightarrow y$ を**含意**といい，「x ならば y」を意味する．$x \Leftrightarrow y$ を**同値**といい，「$x \Rightarrow y$ かつ $y \Rightarrow x$」を意味する．これらを真理値表で表すと以下のようになる．

x	y	$x \oplus y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

命題 B.6. x, y を論理変数（論理関数）とする．このとき，

$$x \oplus y \;\equiv\; (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

証明. 真理値表より明らか. ■

問 B.7. $x \oplus y \oplus z$ の真理値表を示しなさい.

事実 B.3. $x_1, x_2 \ldots, x_n$ を論理変数とする．このとき，$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ は，値が 1 である x_i の個数の偶奇を示している．（偶数であれば 0，奇数であれば 1.）

命題 B.7. x, y を論理変数（論理関数）とする．このとき，

$$x \Rightarrow y \ \equiv \ \bar{x} \vee y.$$

証明. 真理値表より明らか. ■

B.7　述語論理

定義 B.11

A を集合とする．A から $\{0,1\}$ への関数を**述語**という．

例 B.6 (述語)**.** 以下のような関数 φ はすべて述語である．

1. 任意の論理関数 $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
2. 以下のような関数 $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$

$$\varphi(x) \ = \ \begin{cases} 1 & : \ x \text{ が素数} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases}$$

3. A を世界の都市の集合として，以下のような関数 $\varphi : A \to \{0,1\}$

$$\varphi(a) \ = \ \begin{cases} 1 & : \ a \text{ が首都} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases}$$

定義 B.12

A を集合，$\varphi : A \to \{0,1\}$ を述語とする．$A' \subseteq A$ とする．すべての $x \in A'$ について $\varphi(x) = 1$ であることを，$\forall x \in A'[\varphi(x) = 1]$ （または，単に $\forall x \in A'[\varphi(x)]$）と表す．このような命題を**全称命題**といい，$\forall$ を**全称記号**という．

ある $x \in A'$ が存在して $\varphi(x) = 1$ であることを，$\exists x \in A'[\varphi(x) = 1]$ （または，単に $\exists x \in A'[\varphi(x)]$）と表す．このような命題を**存在命題**といい，$\exists$ を**存在記号**と

いう．

$\forall, \exists$ を**量化子**または**限定子**という．

注 B.3. 全称命題，存在命題において，（文脈から）A' が明らかなとき（例えば，$\{0,1\}$ や $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ など）は省略される．

定義 B.13

論理変数，述語，$\wedge$, $\vee$, 否定，及び $\forall, \exists$ で表される式を，**述語論理による論理式**または単に**論理式**という．（厳密には帰納的な形式で定義される．）

例 B.7 (述語論理による論理式)**.** A を集合とする．以下のものはすべて述語論理による論理式である．

1. 命題論理による論理式.
2. $(\forall x \in A[\varphi(x) = 1]) \vee (y \wedge z)$．（$\varphi : A \to \{0,1\}$.）
3. $\forall x_1 \in A, \exists x_2 \in A, \forall x_3 \in A[\varphi(x_1, x_2, x_3, y) = 1]$．（$\varphi : A^4 \to \{0,1\}$.）

注 B.4. 述語論理による論理式では，$\forall, \exists$ の量化子（限定子）が使われる．（命題論理による論理式には量化子が出現しない．）

例 B.8 (論理式)**.** 以下のそれぞれの命題を論理式で記述すると，次のようになる．

1. すべての自然数は整数である．
   $\forall x \in \mathbb{N}[x \in \mathbb{Z}]$.
2. すべての実数 x に対して，$x \geq 0$ ならば $x^2 \leq x^3$ である．
   $\forall x \in \mathbb{R}[x \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq x^3]$.
3. ある実数 c が存在して，すべての実数 x に対して，$x \geq c$ ならば $x^2 \leq x^3$ である．
   $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}[x \geq c \Rightarrow x^2 \leq x^3]$.

問 B.8. 以下の命題を論理式で表しなさい．また，その真偽，更に真偽の理由を述べなさい．

1. すべての実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x \geq 0$ ならば $y^2 < x$ を満たす.
2. ある実数 a が存在して，すべての実数 b に対して，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつ.

3. ある実数 b が存在して，すべての実数 a に対して，２次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつ．
4. すべての実数 x に対して，ある実数 a が存在して，$x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < a\}$ を満たす．
5. すべての実数 a に対して，ある実数 x が存在して，$x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < a\}$ を満たす．

問 B.9. 以下の式は（一般的に）成り立つか．つまり，任意の述語 φ について以下が成り立つか．

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}[\varphi(x,y)=1] \ \equiv \ \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}[\varphi(x,y)=1].$$

そうでなければ，成り立つ例と成り立たない例をあげなさい．

注 B.5. 上の問が示すように，一般には，量化子を記述する順序を変えると異なった論理式になる．

B.8　ド・モルガンの法則（述語論理）

定理 B.8 (ド・モルガンの法則)**.** φ を任意の述語とする．このとき，

$$\begin{aligned}\overline{\forall x[\varphi(x)]} &\equiv \exists x[\overline{\varphi(x)}],\\ \overline{\exists x[\varphi(x)]} &\equiv \forall x[\overline{\varphi(x)}].\end{aligned}$$

証明. 定義より明らか． ■

定理 B.9 (ド・モルガンの法則（一般形）)**.** φ を任意の述語とする．このとき，

$$\begin{aligned}&\overline{\forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, \ldots, Qx_k[\varphi(x_1,x_2,x_3\ldots,x_k)]}\\ \equiv\ &\exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, \ldots, Q'x_k[\overline{\varphi(x_1,x_2,x_3\ldots,x_k)}],\end{aligned}$$

ただし，$Q=\forall$ のとき $Q'=\exists$，$Q=\exists$ のとき $Q'=\forall$ である．また，

$$\begin{aligned}&\overline{\exists x_1, \forall x_2, \exists x_3, \ldots, Qx_k[\varphi(x_1,x_2,x_3\ldots,x_k)]}\\ \equiv\ &\forall x_1, \exists x_2, \forall x_3, \ldots, Q'x_k[\overline{\varphi(x_1,x_2,x_3\ldots,x_k)}],\end{aligned}$$

ただし，$Q=\forall$ のとき $Q'=\exists$，$Q=\exists$ のとき $Q'=\forall$ である．

証明. 数学的帰納法により示す．（定理 A.6 の証明を参照．） ■

B.9　論理と集合

命題 B.10 (論理と集合)**.** A を集合とする．φ,φ' を A 上の述語とする．このとき，以下の二つが成り立つ．

1. （論理和）：
$$\begin{aligned} & \{a\in A:(\varphi\vee\varphi')(a)=1\} \\ = & \{a\in A:\varphi(a)=1\}\cup\{a\in A:\varphi'(a)=1\} \end{aligned}$$

2. （論理積）：
$$\begin{aligned} & \{a\in A:(\varphi\wedge\varphi')(a)=1\} \\ = & \{a\in A:\varphi(a)=1\}\cap\{a\in A:\varphi'(a)=1\} \end{aligned}$$

証明. ベン図より明らか． ■

例 B.9. φ,φ' を $\mathbb{N}_0$ 上の以下の述語とする．

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x \text{ が } 2 \text{ の倍数} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases} \\ \varphi'(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x \text{ が } 3 \text{ の倍数} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

このとき，$\varphi\vee\varphi',\varphi\wedge\varphi'$ は以下の述語となる．

$$\begin{aligned} (\varphi\vee\varphi')(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x \text{ が } 2 \text{ の倍数または } 3 \text{ の倍数} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases} \\ (\varphi\wedge\varphi')(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x \text{ が } 2 \text{ の倍数かつ } 3 \text{ の倍数} \\ 0 & : \ \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

これより，上の命題の等式が成り立つことが分かる．

命題 B.11 (論理と集合)**.** A を集合とする．φ,φ' を A 上の述語とする．集合 $A_\varphi,A_{\varphi'}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} A_\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \{a\in A:\varphi(a)=1\}, \\ A_{\varphi'} &\stackrel{\text{def}}{=} \{a\in A:\varphi'(a)=1\}. \end{aligned}$$

このとき，以下が成り立つ．

$$\varphi \Rightarrow \varphi' \iff A_\varphi \subseteq A_{\varphi'}.$$

ただし，$\varphi \Rightarrow \varphi'$ は $\forall a \in A[\varphi(a) \Rightarrow \varphi'(a)]$ の略記とする．

証明. ベン図より明らか． ■

例 B.10. φ, φ' を $\mathbb{N}_0$ 上の以下の述語とする．

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} 1 & : x \text{ が } 4 \text{ の倍数} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \\ \varphi'(x) &= \begin{cases} 1 & : x \text{ が } 2 \text{ の倍数} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

集合 $A_\varphi, A_{\varphi'}$ を上の命題で定義されたものとする．このとき，

$$\varphi \Rightarrow \varphi' \iff A_\varphi \subseteq A_{\varphi'}.$$

問 B.10. φ, φ' を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の以下の述語とする．

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \begin{cases} 1 & : x + y \text{ が奇数} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \\ \varphi'(x, y) &= \begin{cases} 1 & : x, y \text{ のうち少なくとも一つは奇数} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

集合 $A_\varphi, A_{\varphi'}$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} A_\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \varphi(a, b) = 1\}, \\ A_{\varphi'} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \varphi'(a, b) = 1\}. \end{aligned}$$

φ, φ' の含意，及び，$A_\varphi, A_{\varphi'}$ の包含関係を示しなさい．

章末問題

以下の問いに答えなさい．

1. 以下の言明のうち，命題であるのはどれか．また，命題であれば，真偽を求めなさい．
   (a) 一郎と二郎が同じチームで，かつ，二郎と三郎が同じチームであれば，一郎と三郎は同じチームである．
   (b) 四朗と五郎は異なるチームである．
   (c) $n+1$ は自然数である．
   (d) 33 は素数である．
   (e) 101 までの自然数のうち，偶数と奇数の個数は同じである．
2. 論理式 $(x \oplus y) \Rightarrow z$ の真理値表を作成しなさい．
3. 以下の論理式と同値な式を求めなさい．ただし，変数の総出現回数が最小となるようにすること．特に，恒真ならば１，矛盾ならば０，と表記すること．
   (a) $x \vee \overline{(x \vee \bar{y})}$　　(b) $x \wedge \overline{(x \wedge \bar{y})}$
   (c) $x \vee (x \wedge y)$　　(d) $x \wedge (x \vee y)$
   (e) $(x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$　　(f) $(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$
   (g) $x \Rightarrow x$　　(h) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
4. 以下の論理関数を，ＣＮＦ論理式，ＤＮＦ論理式でそれぞれ表しなさい．

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

5. x, y, z を論理変数とする．このとき，$x \oplus y \oplus z$ を，ＣＮＦ論理式，ＤＮＦ論理式で表しなさい．（ヒント：事実 B.3 を参考に真理値表を作成する．）
6. 関係 $\equiv$（定義 B.7）は同値関係であることを示しなさい．

7. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ を自然数の集合，$x \in \mathbb{N}$ を自然数とする．このとき，$x \in A$, $x \notin A$ それぞれを，限定子 $\forall, \exists$ を用いて表しなさい．
8. 以下の定義を，$\forall, \exists, \wedge, \vee$，否定，及び数学記号を使って表しなさい．
   (a) $A \subseteq B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A \cap B$
   (d) 写像 $f : A \to B$ が全射である
   (e) 写像 $f : A \to B$ が単射である
   (f) 写像 $f : A \to A$ が恒等写像である
   (g) 同値関係における 3 つの条件（反射律，対称律，推移律）
9. φ, φ' を $\mathbb{R}^3$ 上の以下の述語とする．

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= \begin{cases} 1 & : \quad x+y+z > 0 \\ 0 & : \quad \text{それ以外} \end{cases} \\
\varphi'(x,y,z) &= \begin{cases} 1 & : \quad x,y,z \text{ のうち少なくとも一つは正} \\ 0 & : \quad \text{それ以外} \end{cases}
\end{aligned}
$$

集合 $A_\varphi, A_{\varphi'}$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
A_\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(a,b,c) = 1\} \\
A_{\varphi'} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \varphi'(a,b,c) = 1\}.
\end{aligned}
$$

φ, φ' の含意，及び，$A_\varphi, A_{\varphi'}$ の包含関係を示しなさい．

各章の問，及び章末問題の略解

集合

1. なし.
2. なし.
3.
   - $\{i : i$ は素数$\}$.
   - $\{2, 4, 6, 8\}$.
   - $\{a : a$ は首都$\}$.
4. (1), (4), (5).
5. 奇数の集合.
6.
   - $A \cap B = \{2, 3, 5\}$.
   - $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 11\}$.
7.
   - $A \setminus B = \{1, 4\}$.
   - $A \oplus B = \{1, 4, 7, 11\}$.
8. $\emptyset$ は空集合.（$|\emptyset| = 0$.）$\{\emptyset\}$ は空集合（だけ）を要素とした集合.（$|\{\emptyset\}| = 1$.）
9. (2), (3), (4), (7), (10), (11), (13), (15), (16).
10. $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
11. $2^\emptyset = \{\emptyset\}$.
12.
   - A を正の整数，B を負の整数，$C = \{0\}$ とした場合の A, B, C.
   - A_i を 5 で割ったら i 余る整数の集合とした場合の A_0, A_1, A_2, A_3, A_4.

章末問題

1. (a) $\{i \in \mathbb{Z} : -5 \leq i \leq 10\}$.
   (b) $\{a \in \mathbb{R} : a$ は無理数$\}$.
   (c) $\{a : a$ は都道府県庁所在地$\}$.
   (d) $\{i \in \mathbb{N} : i$ は 3 で割ったら 2 余る$\}$.
   (e) $\{i \in \mathbb{N} : i$ は 60 の約数かつ $i \leq 12\}$.

2. (a), (c), (e)．大きさは，それぞれ 16, 47, 8.
3. 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12
4. (a) $\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $\bar{B} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, $\bar{C} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
   (b) $\overline{A \cup B \cup C} = \{6, 8, 10\}$
   (c) $\overline{A \cap B \cap C} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$
5. (a) $A \cup B = \{i \in \mathbb{Z} : i$ は 2 または 3 で割り切れる $\}$
   (b) $A \cap B = \{i \in \mathbb{Z} : i$ は 2 と 3 の両方で割り切れる $\}$
   (c) $A \setminus B = \{i \in \mathbb{Z} : i$ は 2 で割り切れるが 3 では割り切れない $\}$
   (d) $A \oplus B = \{i \in \mathbb{Z} : i$ は 2 または 3 のどちらか一方だけで割り切れる $\}$
6. $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
7. $|2^A| = 2^n$

論理

1. 1, 2.
2.

x	y	z	$x \vee y \vee z$	$x \wedge y \wedge z$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

3.

x	y	$x \vee \bar{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x	y	z	$x \vee (y \wedge z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

4. • $\overline{x \vee yz} = \bar{x} \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$
   • $\overline{(x \vee y)(x \vee z)} = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}$
5. • $\bar{y} \vee \bar{z}$ にド・モルガンの法則を用いて，$\bar{y} \vee \bar{z} \vee yz \equiv \overline{yz} \vee yz$ より明らか．（次のように示すのでもよい．$\bar{y} \vee \bar{z}$ が 0 になるのは，$y = z = 1$ のときかつそのときに限る．一方，そのときは $yz = 1$ になる．）
   • $(x \vee y)(x \vee z)$ に分配則を用いて，$\overline{x \vee yz} \vee (x \vee y)(x \vee z) \equiv \overline{x \vee yz} \vee (x \vee yz)$ より明らか．（次のように示すのでもよい．$\overline{x \vee yz} = \bar{x} \wedge (\bar{y} \vee \bar{z})$ より，$x = 0$ のときは $(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee yz$ となり（一つ目より）恒真，$x = 1$ のときは $(1 \vee y)(1 \vee z)$ となり恒真となる．いずれも恒真なので．）
6. • CNF：$(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$.
   • DNF：$\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$.
7.

x	y	z	$x \oplus y \oplus z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

8. • $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}[x \geq 0 \Rightarrow y^2 < x]$．偽（$x = 0$ のとき，$y^2 < x$ を満たす $y \in \mathbb{R}$ は存在しない．）
   • $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}[x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつ$]$．偽（任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し

て，b を十分大きくすれば条件は成り立たない.）

- $\exists b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}[x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつ$]$．真（$b = 0$ とすればよい.）
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}[x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < a\}]$．真（$a = |x| + 1$ とすればよい.）
- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}[x \in \{y \in \mathbb{R} : |y| < a\}]$．偽（$a = 0$ のとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して条件は成り立たない.）

9. 成り立たない.
   - 成り立つ例：$\varphi(x, y) \equiv x \leq y^2$.
   - 成り立たない例：$\varphi(x, y) \equiv x \leq y$.
10. $\varphi \Rightarrow \varphi'$, $A_\varphi \subseteq A_{\varphi'}$.

章末問題

1. (a)：真, (d)：偽, (e)：偽
2.

x	y	z	$(x \oplus y) \Rightarrow z$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3. (a) $x \vee y$（ド・モルガンの法則＋分配法則）
   (b) $x \wedge y$（ド・モルガンの法則＋分配法則）
   (c) x（ベン図で考える）
   (d) x（ベン図で考える）
   (e) $\overline{x \vee y}$（$\bar{x} \wedge \bar{y}$ でもよい）
   (f) $\overline{x \wedge y}$（$\bar{x} \vee \bar{y}$ でもよい）
   (g) 1
   (h) 1
4.
   - CNF論理式：$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$
   - DNF論理式：$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$
5.
   - CNF論理式：$(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

- ＤＮＦ論理式：$x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$.

6. 論理式上の二項関係 $R_\equiv$ を，$R_\equiv = \{(\varphi, \varphi) : \varphi \equiv \varphi'\}$ と定義する．同値関係の定義に従い，$R_\equiv$ に対して，反射律，対称律，推移律が成り立つことをそれぞれ示す．
7. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$（定義 **??** 参照）とすれば，

$$\begin{array}{lcl} x \in A & : & \exists i \in [n][a_i = x] \\ x \notin A & : & \forall i \in [n][a_i \neq x] \end{array}$$

8. (a) $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in A\ [x \in B]$
   (b) $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
   (c) $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
   (d) 関数 $f : A \to B$ が全射である $\stackrel{\text{def}}{=} \forall b \in B, \exists a \in A\ [f(a) = b]$
   (e) 関数 $f : A \to B$ が単射である $\stackrel{\text{def}}{=} \forall a, a' \in A\ [a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')]$
   (f) 写像 $f : A \to A$ が恒等写像である $\stackrel{\text{def}}{=} \forall a \in A\ [f(a) = a]$
   (g) $R \subseteq A^2$ が同値関係であるとは以下の３つの条件を満たすことである．
      - 反射律 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall a \in A\ [(a, a) \in R]$
      - 対称律 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall a, a' \in A\ [(a, a') \in R \Rightarrow (a', a) \in R]$
      - 推移律 $\stackrel{\text{def}}{=} \forall a, b, c \in A\ [(((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R)) \Rightarrow (a, c) \in R]$
9. $\varphi \Rightarrow \varphi'$, $A_\varphi \subseteq A_{\varphi'}$.